

WAS IST EIN MODELL?

(work in progress)

Prof. Dr. Bernd Mahr

Formale Modelle, Logik und Programmierung

Technische Universität Berlin

14. April 2005

**Ringvorlesung „Der Modellbegriff in Natur- und Ingenieurwissenschaften“ des
Graduiertenkollegs „Stochastische Modellierung und quantitative Analyse großer
Systeme in den Ingenieurwissenschaften“ an der TU Berlin im SS 05**



i have constructed a working model of the internet! simply put your time and money and ideas into this box, then bury it so no one will see them!!

Das Problem

Skepsis

Es gibt keinen allgemeinen Modellbegriff, der **reichhaltig** genug ist, um aussagekräftig zu sein.

Desiderat

Es fehlt eine **anerkannte** Definition

Aufgabe

Es gilt herauszufinden, was das Gemeinsame an Dingen ist, das es **rechtfertigt**, von Modellen zu sprechen.

Agenda

1. Bestandsaufnahme
2. Das Urteil des Modellseins
3. Wortgeschichte des Modellbegriffs
4. Merkmale des Modellseins
5. Aspekte des Modellseins
6. Gebrauchsweisen von Modellen
7. Das Modell der Schönheit
8. Das Mögliche im Modellsein

1.

Bestandsaufnahme

Zum Begriff des Modells gibt es

- Beispiele
- Definitionen
- Theorien
- Klassifikationen
- Erklärungen
- Kulturwissenschaftliche Studien
- Philosophische Aufsatzsammlungen
- Erfahrung mit Modellen

Bestandsaufnahme

Zum Begriff des Modells gibt es

- Beispiele
- Definitionen
- Theorien
- Klassifikationen
- Erklärungen
- Kulturwissenschaftliche Studien
- Philosophische Aufsatzsammlungen
- Erfahrung mit Modellen

Modell in einer Modeschau



Differenzialgleichungssystem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{dV} \int_A dW_n dA - \frac{1}{dV} \int \delta_\rho dA,$$

$$\frac{\partial (dW_m)}{\partial t} = -\frac{1}{dV} \int_A dW_n W_m dA - \frac{\partial P}{\partial m} + \rho \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial m} + 2 \rho \omega \frac{\partial r}{\partial m} W_p + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial m} W_p W_p - \frac{1}{dV} \int_A \delta_{W_p} dA,$$

$$\frac{\partial (d(rW_p))}{\partial t} = -\frac{1}{dV} \int_A dW_n (rW_p) dA - \frac{\partial P}{\partial \rho} - 2 \rho \omega \frac{\partial \rho}{\partial m} W_m - \frac{1}{dV} \int_A \delta_{rW_p} dA,$$

$$\frac{\partial (dE)}{\partial t} = -\frac{1}{dV} \int_A dW_n E_\Sigma dA + \rho \omega^2 r W_m \frac{\partial r}{\partial m} - \frac{1}{dV} \int_A \delta_E dA,$$

где $E = C_v T + \frac{W_m^2 + W_p^2}{2}$, $E_\Sigma = E + \frac{P}{\rho}$, $P = dRT$.

Malermodell

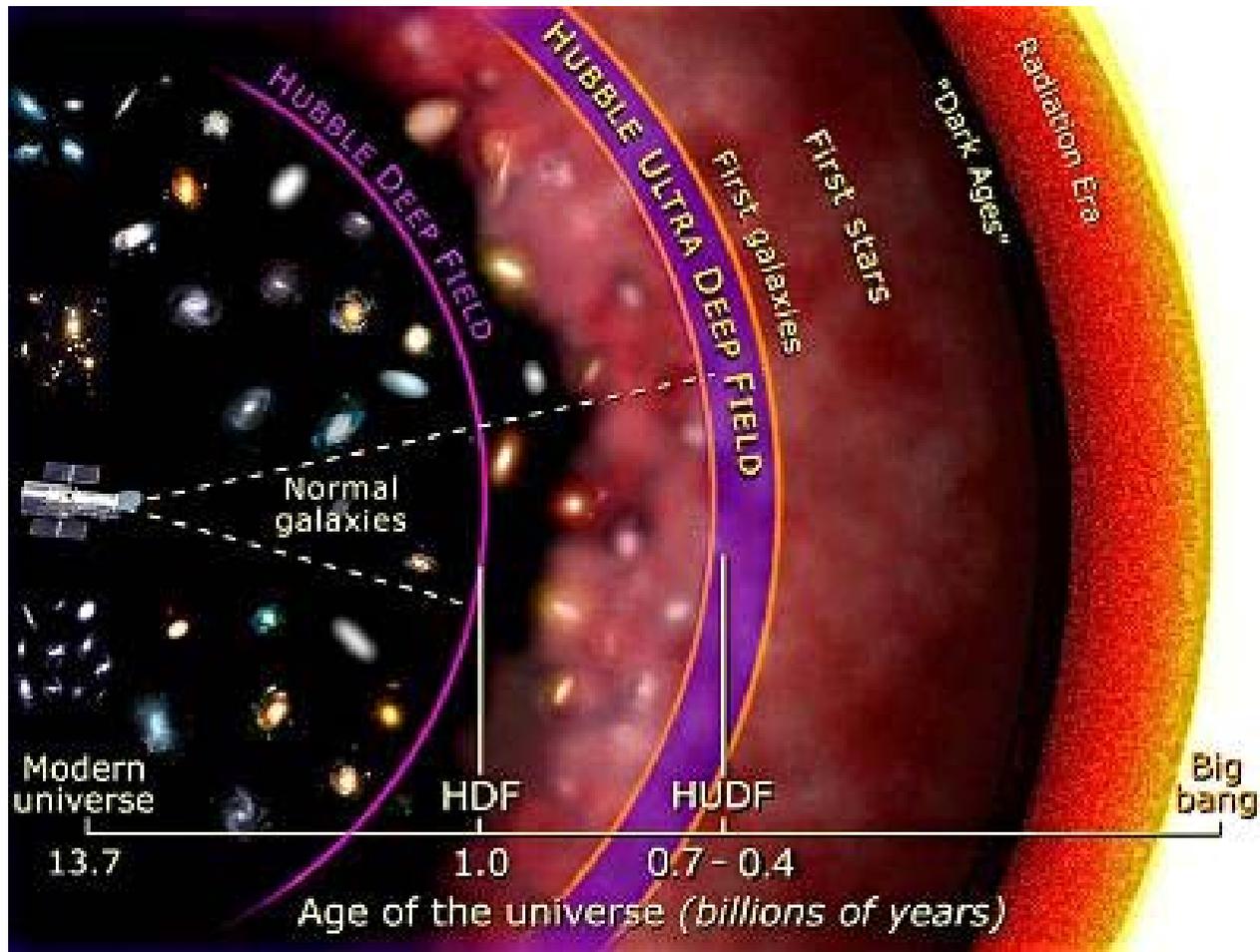


Modellauto



BUB - *Bubmobile 1:87*

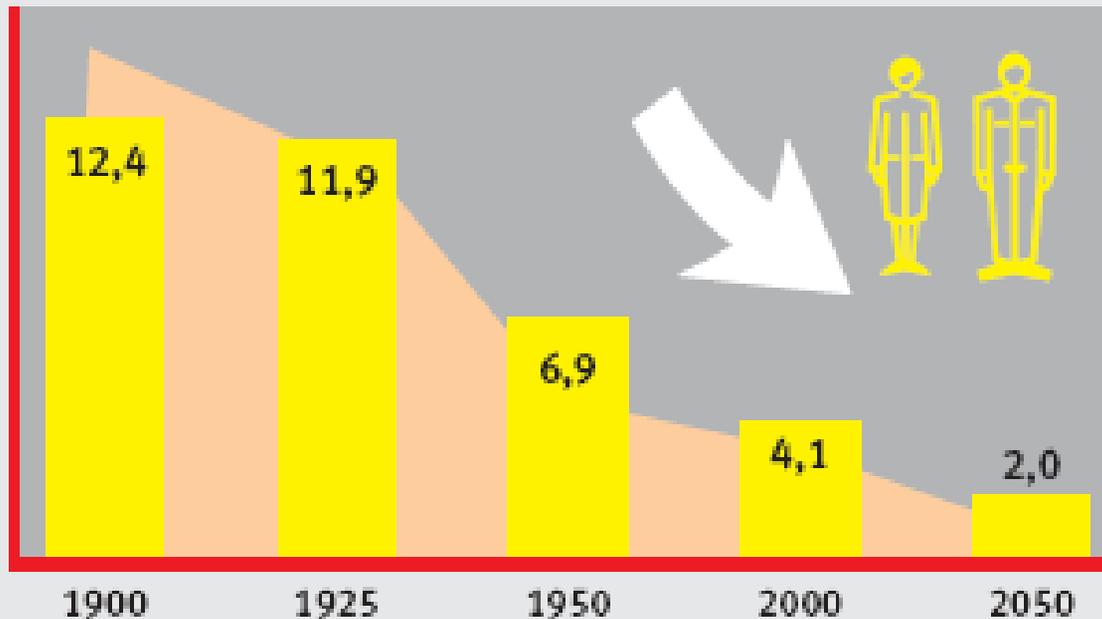
Die Vorstellung vom Urknall



Rentenfinanzierung

Demografischer Wandel seit 100 Jahren

So viele 15- bis 65-jährige kommen auf eine Person ab 65 Jahren
(Entwicklung in Deutschland von 1900 bis 2000/ 2050 Schätzung)



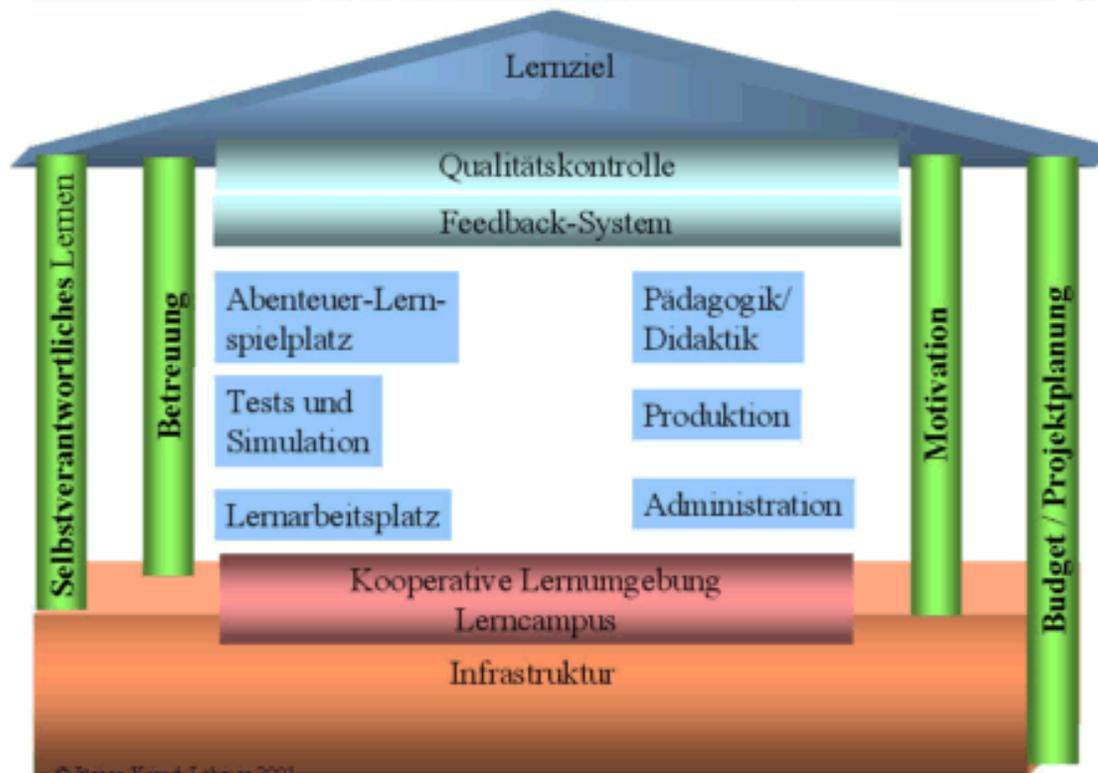
Quelle: Mythos Demografie, verdi, © IG Metall

Architekturmodell

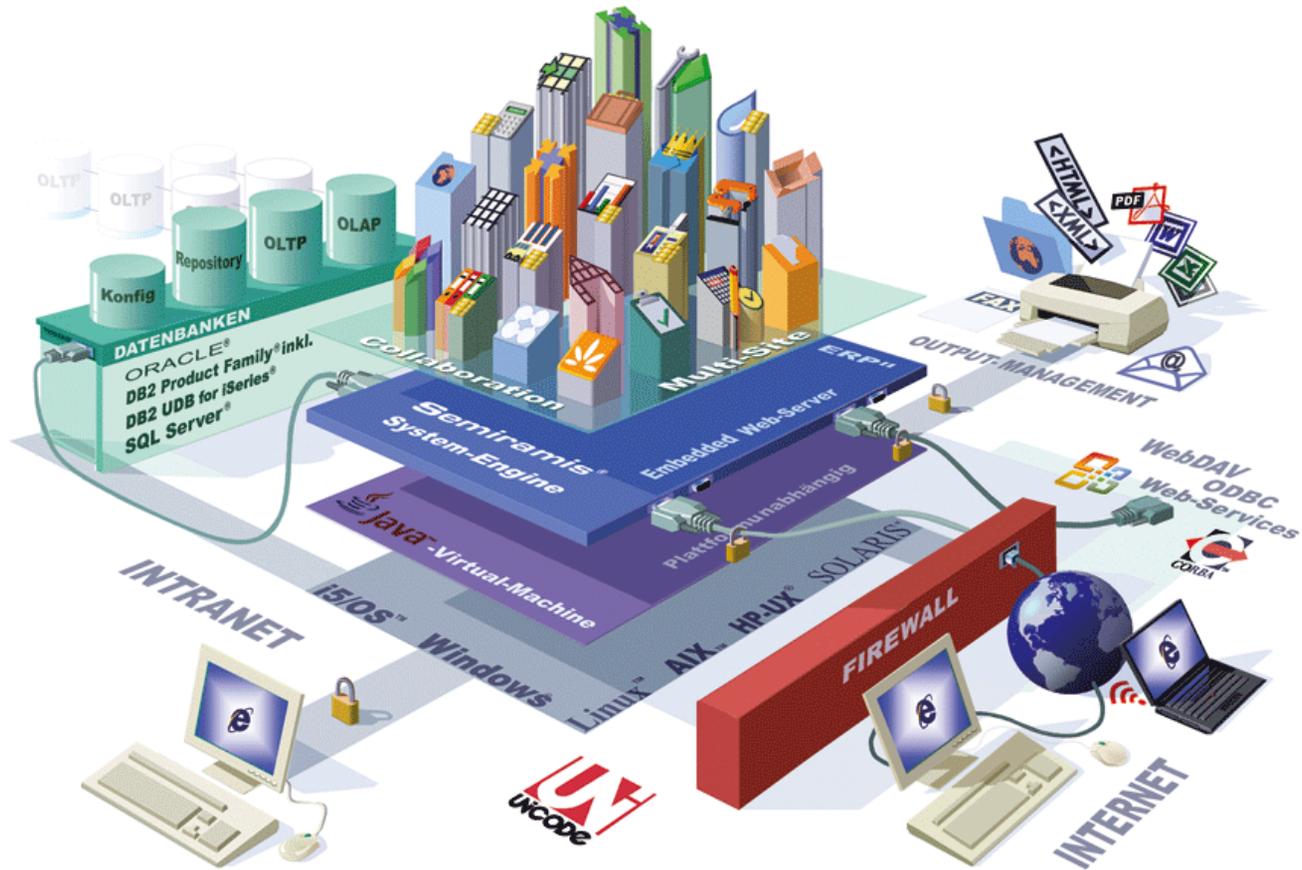


Systemarchitektur

Architekturmodell virtuelles Lernen



Systemkonfiguration



Zahlen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Zinnsoldaten



Modelldefinition

Ein Modell ist ein „in Alltags- und Wissenschafts-
sprache vielfältig verwendeter Begriff, dessen
Bedeutung sich allgemein als konkrete, wegen
idealisierender Reduktion auf relevante Züge,
fasslichere und leichter realisierbare Darstellung
unübersichtlicher oder abstrakter Gegenstände oder
Sachverhalte umschreiben lässt. Dabei tritt die
Darstellung der objekthaften Bestandteile hinter der
Darstellung ihrer rational-funktionalen Beziehungen
(Struktur) zurück“

Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Mittelstraß 1995

Modelldefinition

„Ein Modell ist die Synthese einer begrifflichen Vorstellung, einer Ausdrucksform und einer Einnahme einer Rolle, durch die es eine Funktion erfüllt. ...Unsere Fähigkeit zur Konzeptualisierung und Modellierung ist eine Kompetenz, die der Sprachkompetenz vergleichbar ist. ...Ein Modell haben heißt, einen physikalischen Symbolträger produzieren zu können oder erkennen zu können, der ein Modell darstellt, und den Bedeutungsanteil des Modells verstehen zu können.“

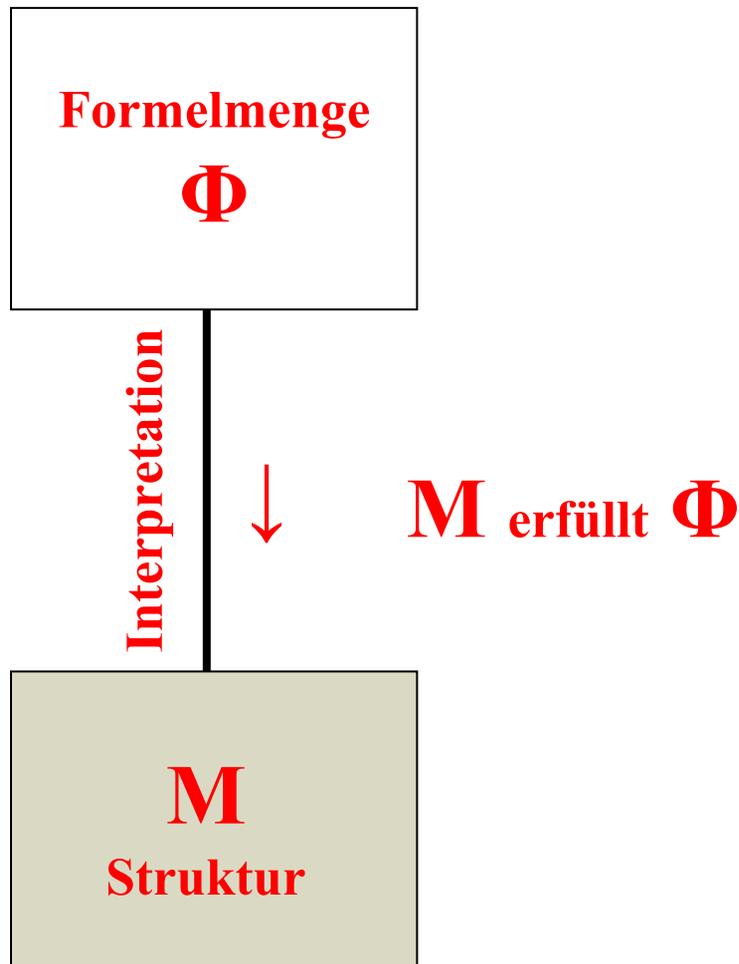
Words, George A. Miller 1991

Modelldefinition

„Models are abstractions that portray the essentials of complex problems or structure by filtering out non-essential details, thus making the problem easier to understand. ... We build models of complex systems because we cannot comprehend such systems in their entirety. There are limits to human capacity to understand complexity. Models help us organize, visualize, understand and create complex things“

Visual Modeling with Rational Rose and UML, Terry Quatrani 1998

Der Modellbegriff von Tarski

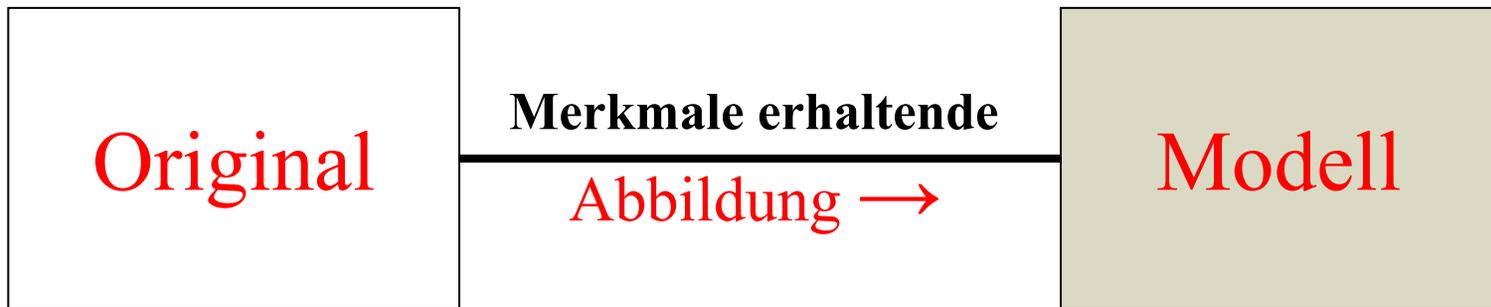


- Liefert eine Semantik für formale Ausdrücke
- Definiert die Konsistenz von Formelmengen
- Begründet die Definition des Folgerungsbegriffs

Patrick Suppes (1961):

Tarskis Modellbegriff ist für die Wissenschaften universell

Der Modellbegriff von Stachowiak



- „Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale...
- Modelle erfassen ... nur solche Attribute, die für den jeweiligen Modellerschaffer und/oder Modellnutzer relevant erscheinen
- Modelle sind ihren Originalen nicht per se zugeordnet, ... Ersatzfunktion...für Subjekte...Zeitintervall...Einschränkung“

2.

Das Urteil des Modellseins

Beobachtung

Im Zentrum der Frage ‚Was ist ein Modell?‘ steht die Suche nach dem Begründungszusammenhang, der das **Urteil**, ein Modell zu sein, rechtfertigt. Dieses Urteil ist jeweils konkret und schreibt einem gegebenen Gegenstand das **Modellsein** zu.

Präzisierte Frage

Was begründet es, im Modellurteil von einem irgendwie gearteten Gegenstand zu sagen, er sei ein Modell?

Das Urteil des Modellseins

Hypothese 1

Die Grundlage des Modellurteils lässt sich als ein konventionalisiertes Muster sehen, das die **Merkmale des Modellseins** ausweist. In jedem konkreten Fall, in dem durch ein Modellurteil einem Gegenstand das Modellsein zugeschrieben wird, erfahren diese Merkmale eine bewertbare Instanziierung.

Hypothese 2

Das Urteil des Modellseins hängt darüber hinaus von Gegebenheiten ab, die sich als **Aspekte des Modellseins** allgemein beschreiben lassen.

Das Modellsein als Urteil

Im Modellbegriff der Logik wird das Modellsein durch ein Urteil auf Strukturen bezogen und durch die **Gültigkeit** einer Menge von Aussagen gerechtfertigt.

M erfüllt Φ

Stachowiak formalisiert die Abbildbeziehung zwischen Original und Modell durch das urteilende Verhalten eines Moles'schen Organismus K im Hinblick auf einen Modellzweck Z im Zeitintervall T .

Original \longrightarrow Modell

3.

Wortgeschichte des Modellbegriffs

modus (lateinisch): Maß, Maßstab, Größe Menge, Masse, Zeitmaß, Takt, Melodie, Ziel, Grenze, Maßhalten, Mäßigung, Vorschrift, Regel, Art, Weise

modulus (**Vitruv**): relativierte und berechnete Maßeinheit zur Erzeugung von Symmetrie

modul (frühes Hochdeutsch): modulus, Regel, Muster, Form, Vorbild; Flächeneinheit von Gitterstrukturen

modello (Italien, 15.Jh.): räumliches Architekturmodell, asempro (exempla), disegno (Entwurf)

Modell, model, modèle (seit dem 16.Jh.): Breites Spektrum von Bedeutungen, Allgemeinbegriff

Vitruvius Pollio, Marcus

- vermutlich 84 v.Chr. geboren
- Ausbildung als Architekt und Ingenieur
- Tätigkeiten im Heeresdienst
- Bauleiter in Caesars und Augustus' Stab: Bau von Kriegsmaschinen, Wasserleitungen
- Ab 33 v.Chr. erhält er durch die Fürsprache von Augustus' Schwester Octavia Rentenzahlungen
- Von 33 bis vermutlich 14 v.Chr. fertigt er den Architekturtraktat *de architectura libri decem* an

Aus der Vorrede zum 1. Buch

„Als Dein göttlicher Geist und Wille, Imperator Caesar, damit beschäftigt war, sich der Weltherrschaft zu bemächtigen...

...weil ich bemerkte, dass Du schon viel gebaut hast, jetzt noch baust und auch in der noch übrig bleibenden Zeit Deine Sorge öffentlichen und privaten Bauten zuwenden wirst, damit sie entsprechend der Größe Deiner Taten der Nachwelt zum Gedächtnis überliefert werden, habe ich fest umrissene Vorschriften zusammengestellt, damit Du bei ihrer Beachtung die Beschaffenheit der Bauten, die Du schon geschaffen hast und noch schaffen wirst, selbst beurteilen kannst, denn ich habe in diesen Büchern alle Lehren der Baukunst dargelegt.“

de architectura libri decem, Vitruv, 22 v.Chr.

Modulus, Proportion und Symmetrie

„Die Formgebung der Tempel beruht auf Symmetrie, an deren Gesetze sich die Architekten peinlichst genau halten müssen. Diese aber wird von der Proportion erzeugt, die die Griechen *analogia* nennen. Proportion liegt vor, wenn den Gliedern am ganzen Bau und dem Gesamtbau ein berechneter Teil (*modulus*) als gemeinsames Grundmaß zu Grunde liegt. Aus ihr ergibt sich das System der Symmetrien. Denn kein Tempel kann ohne Symmetrie und Proportion eine vernünftige Formgebung haben, wenn seine Glieder nicht in einem bestimmten Verhältnis zu einander stehen, ...“

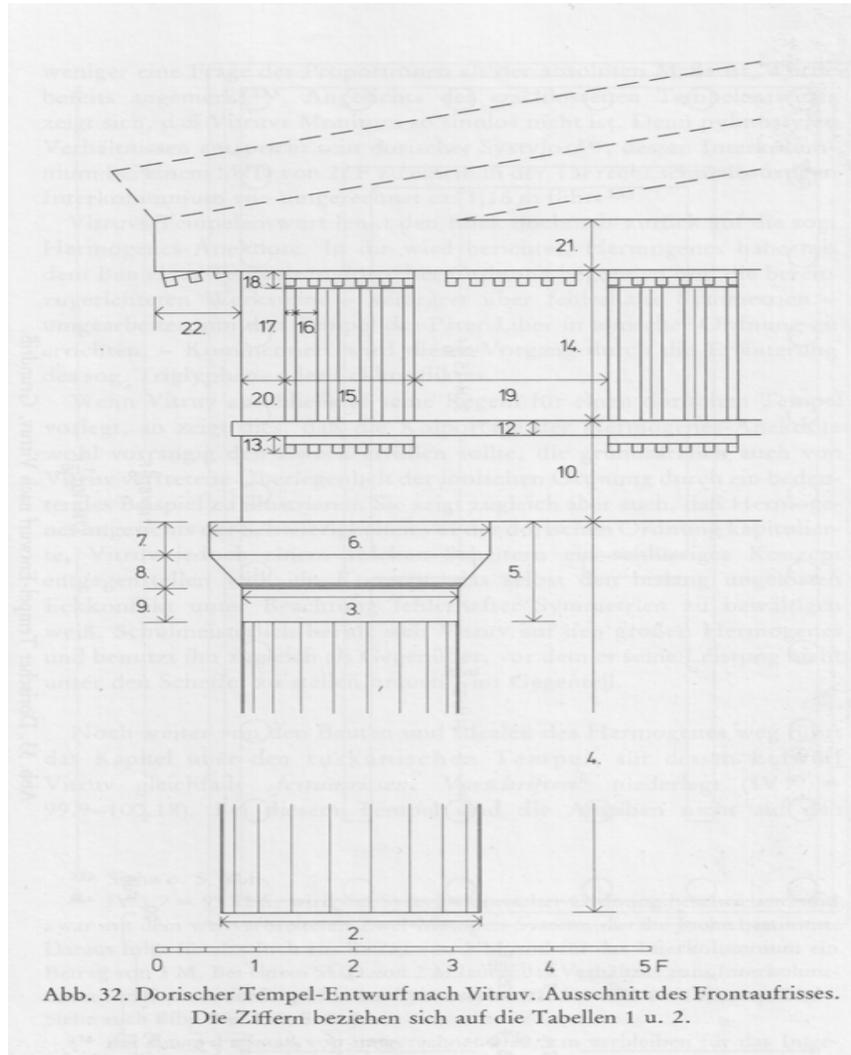
de architectura libri decem, Vitruv

System der Symmetrien

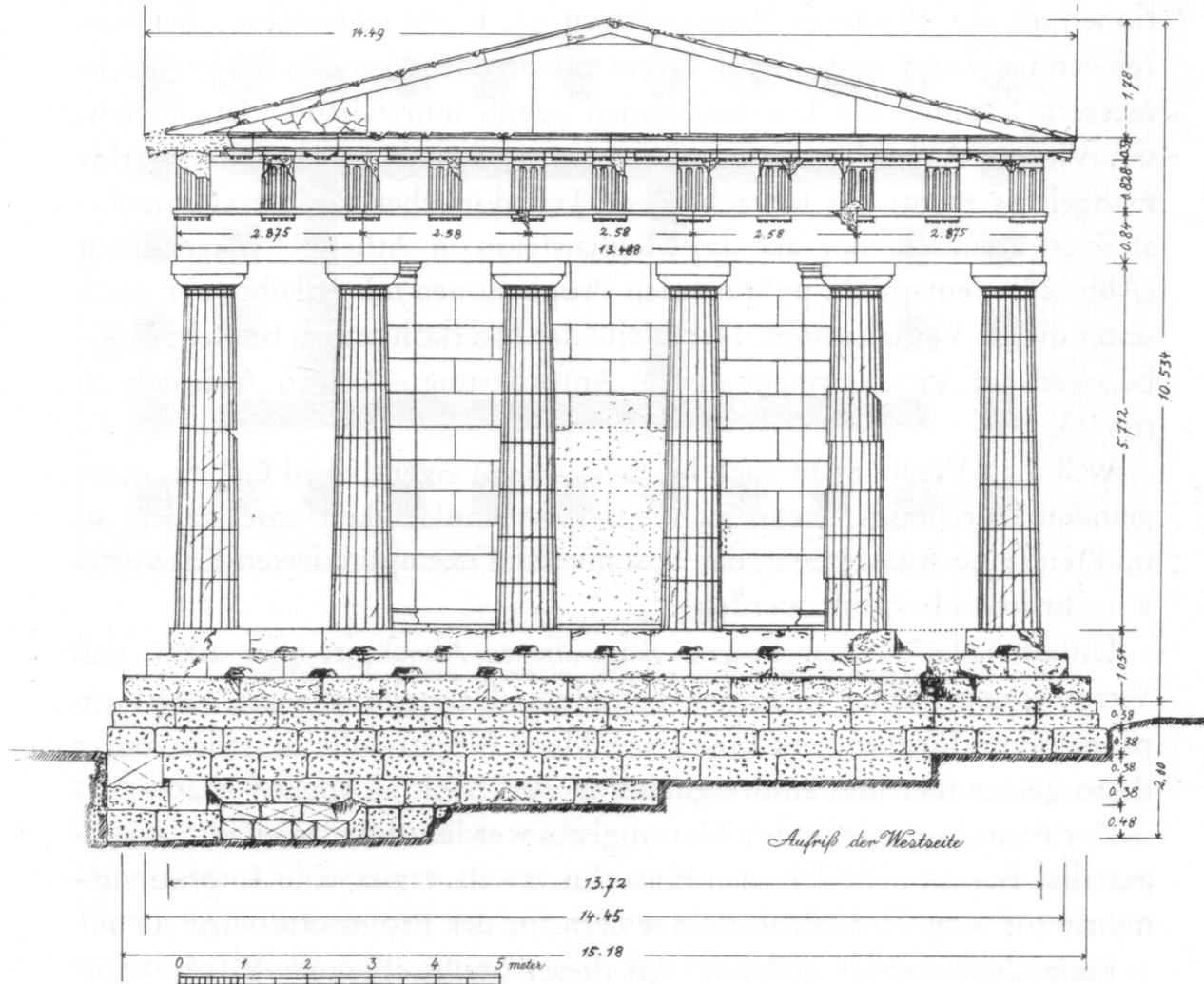
„An dieser Stelle, wo die Säulen errichtet werden, soll die Stirnseite des dorische Tempels eingeteilt werden: Wenn es sich um einen Viersäuler handelt, in 27, wenn es sich um einen Sechssäuler handelt, in 42 Teile. Von diesen Teilen wird ein Teil das Grundmaß (*modulus*) sein, das die Griechen *embater* nennen, und mit diesem festgesetzten Grundmaß wird durch Berechnung die Gliederung des gesamten Bauwerks vorgenommen. Die Dicke der Säulen wird zwei Grundmaße sein, die Höhe einschließlich vierzehn.“

de architectura libri decem, Vitruv

Vom Grundmaß zur Proportion



Von der Proportion zur Symmetrie



Von der Symmetrie zur Eurythmie



Der Tempel von Agrigent

Die Friedrichstrasse in Berlin



Mannheim 1813

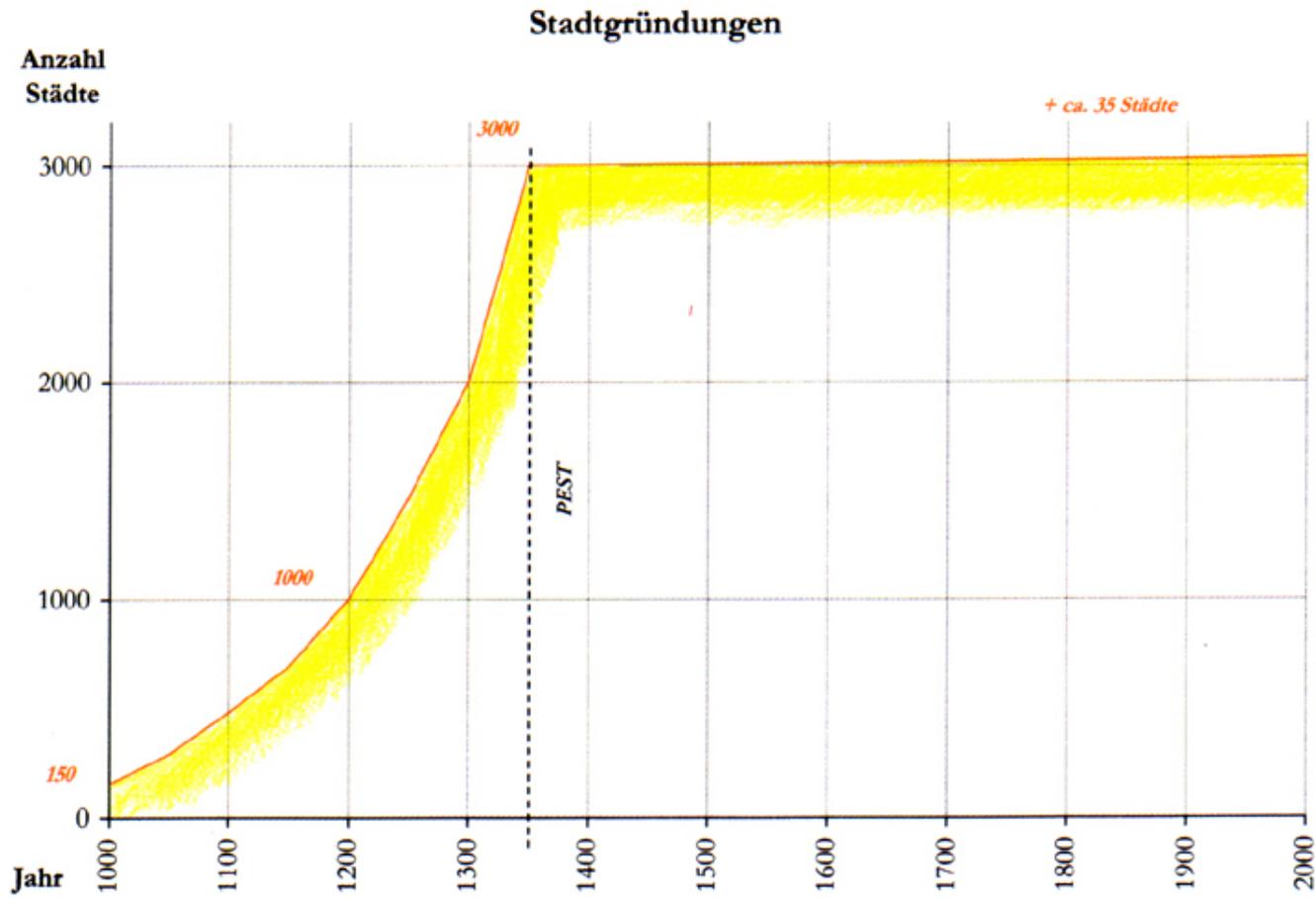


Der *campus initialis* von Villingen

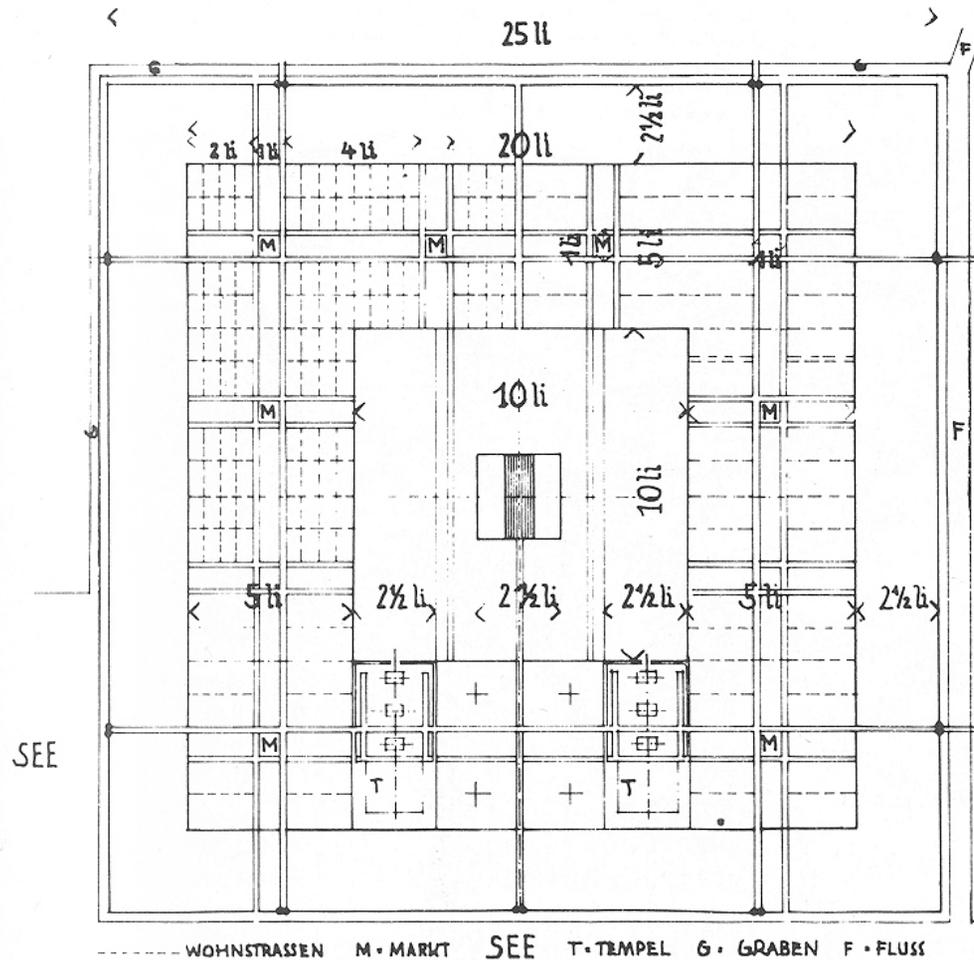


modul

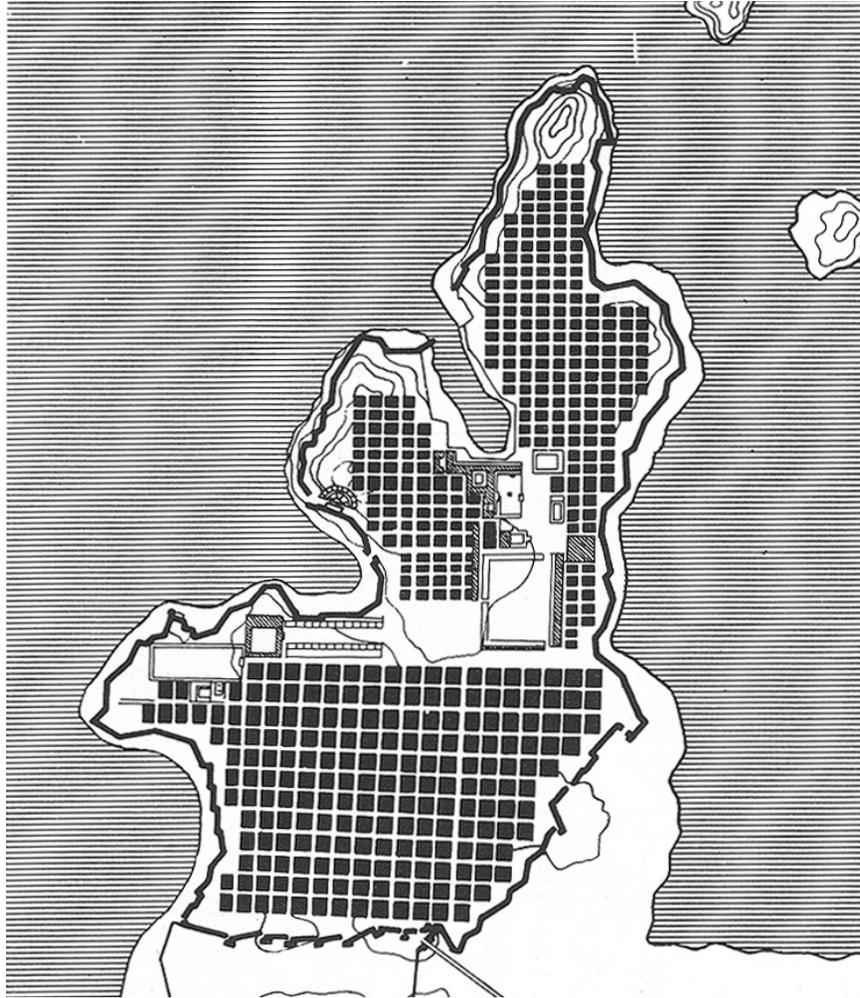
Die Zeit der Stadtgründungen



Der Plan von Hangzhou

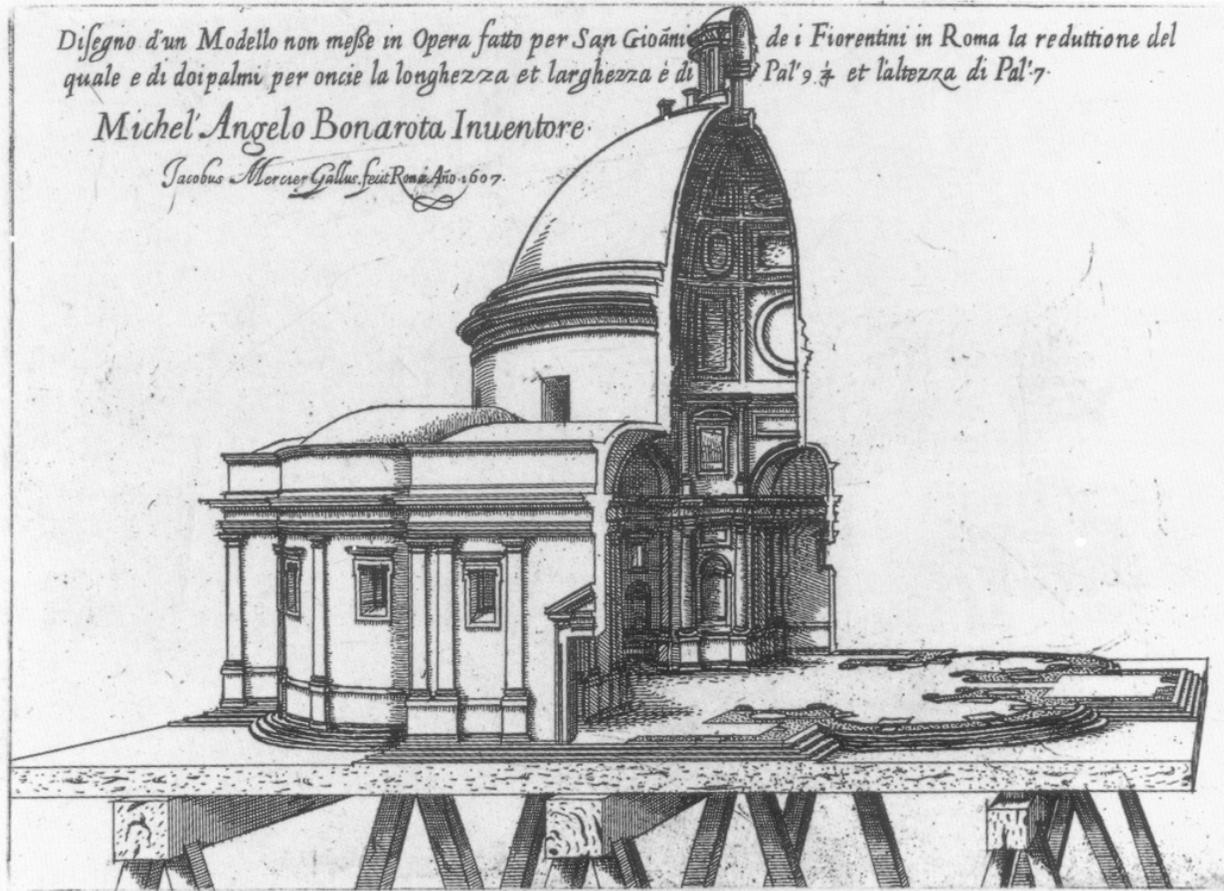


Die Gitterstadt Milet



479 v.Chr.
Hippodamos

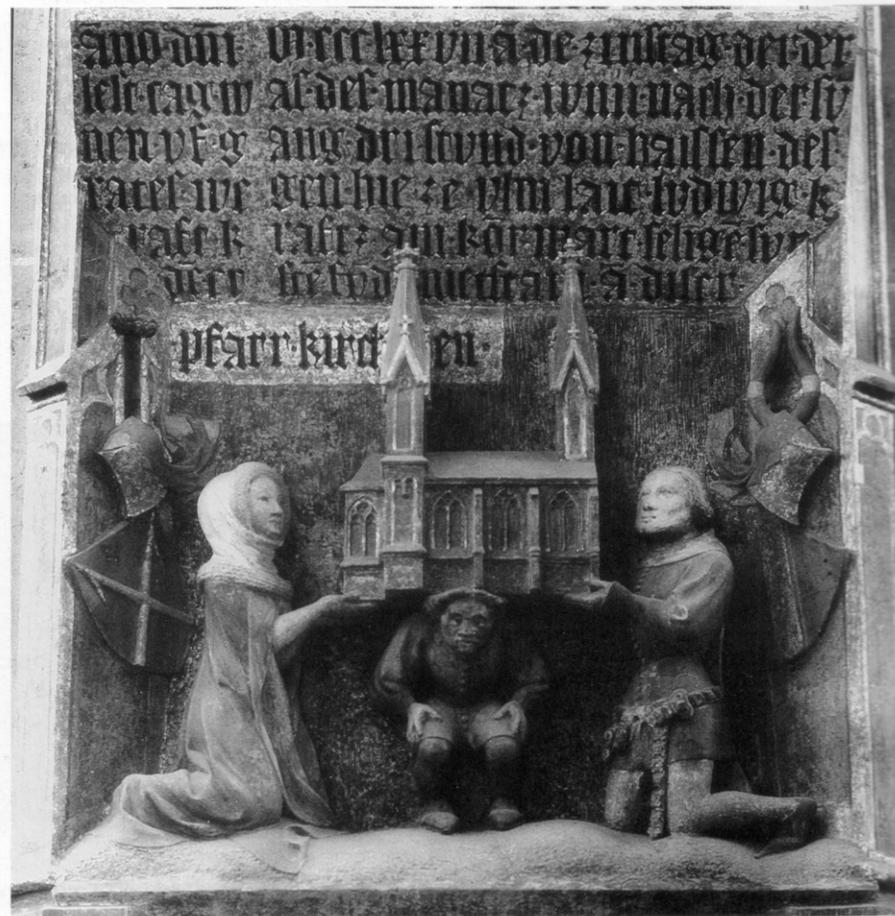
Der Stich eines *modello*



Die Kuppel von St. Peter als *modello*



modello des Ulmer Münster



4.

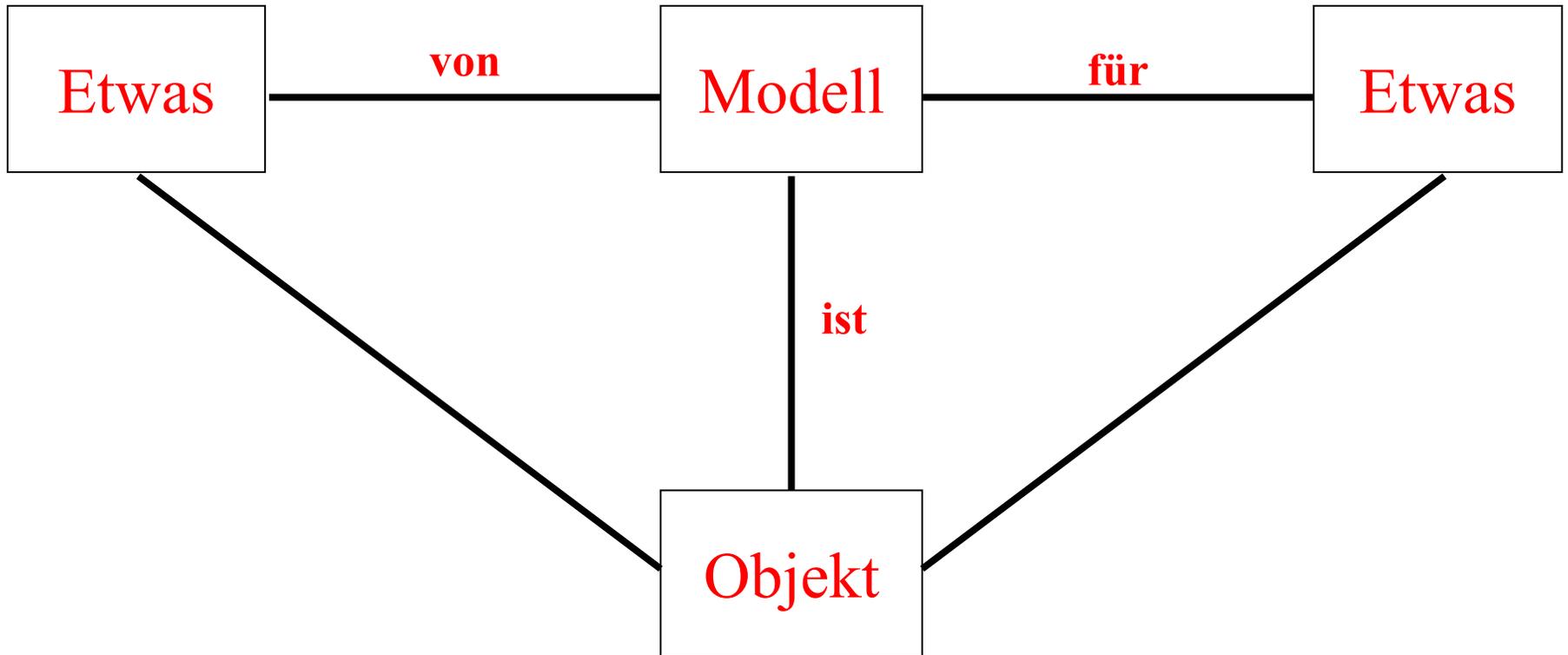
Merkmale des Modellseins

In systematischer Betrachtung lassen sich die Merkmale des Modellseins in vier Gruppen aufteilen:

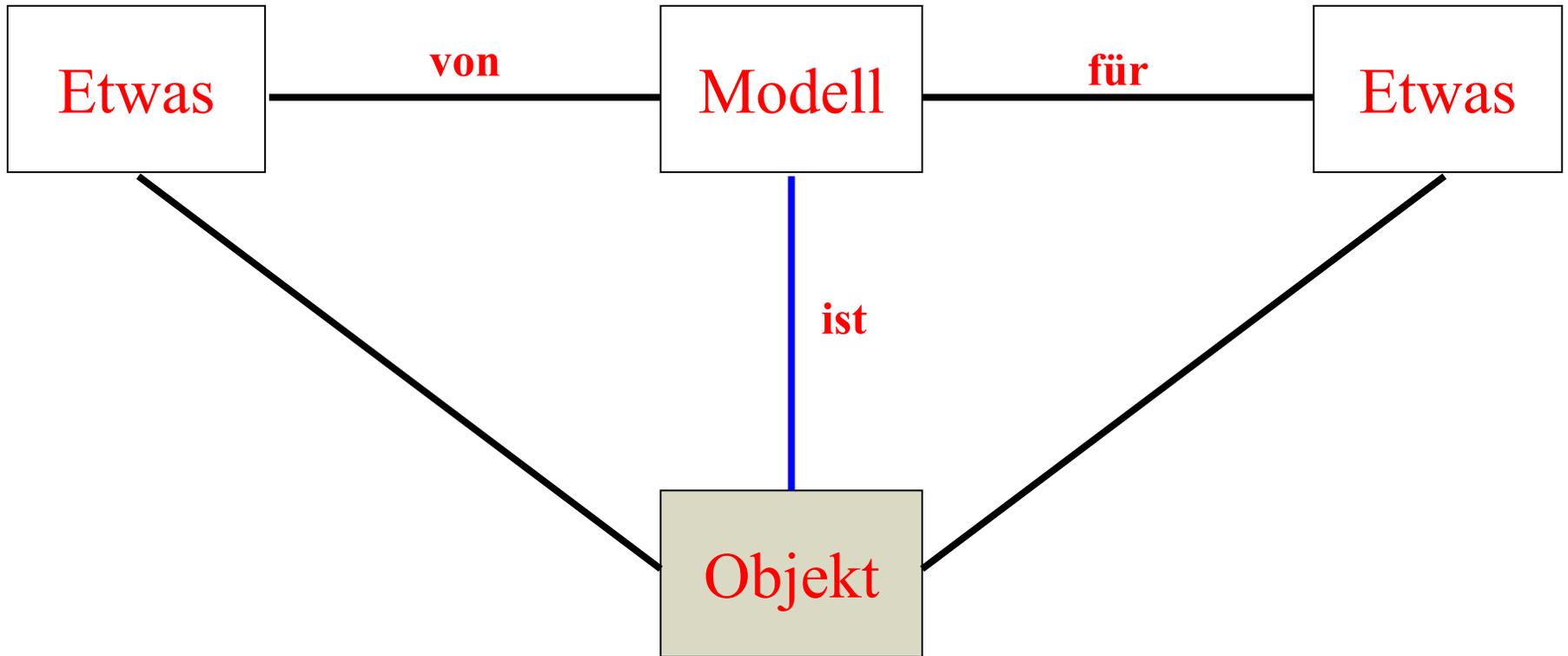
- **Ontologie** des Modellseins
- **Modalität** des Modellseins
- **Kontextualität** des Modellseins
- **Funktion** von Modellen

Der allgemeine Zusammenhang dieser Merkmale bildet das epistemische Muster, das den Modellbegriff konstituiert.

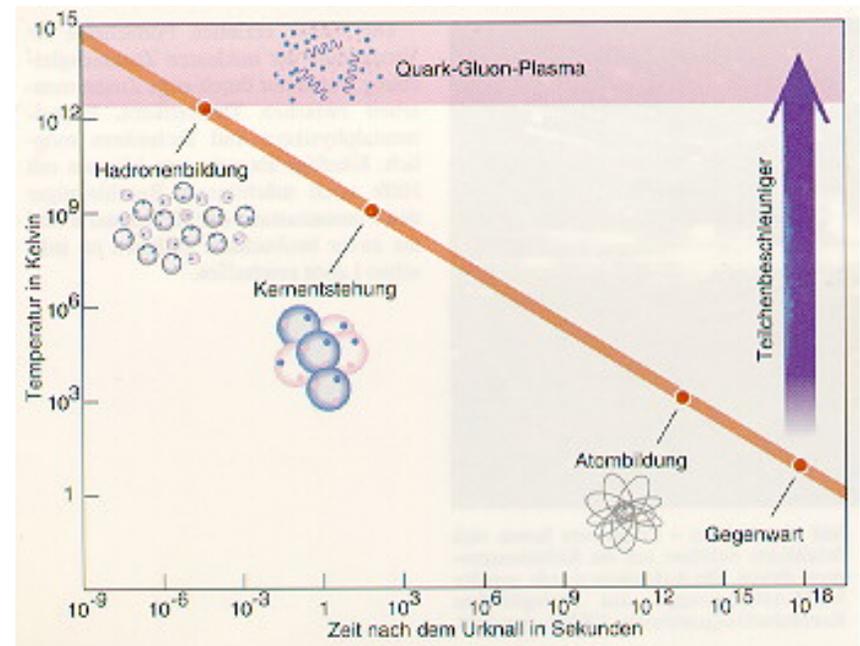
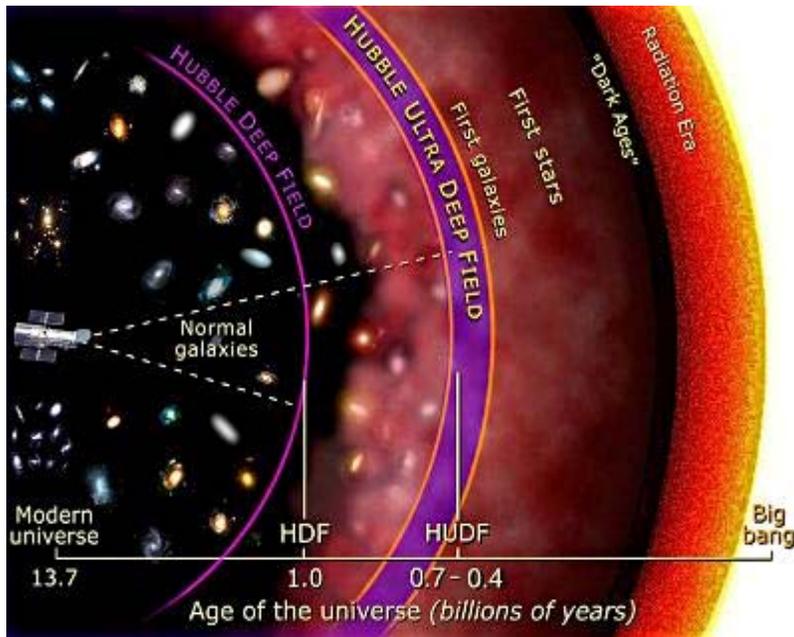
Ontologie des Modellseins



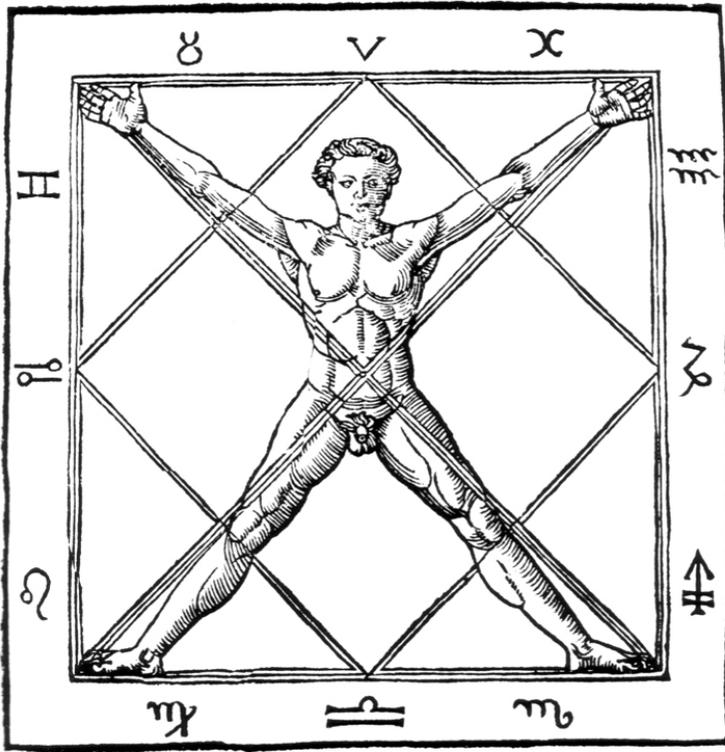
Ontologie des Modellseins



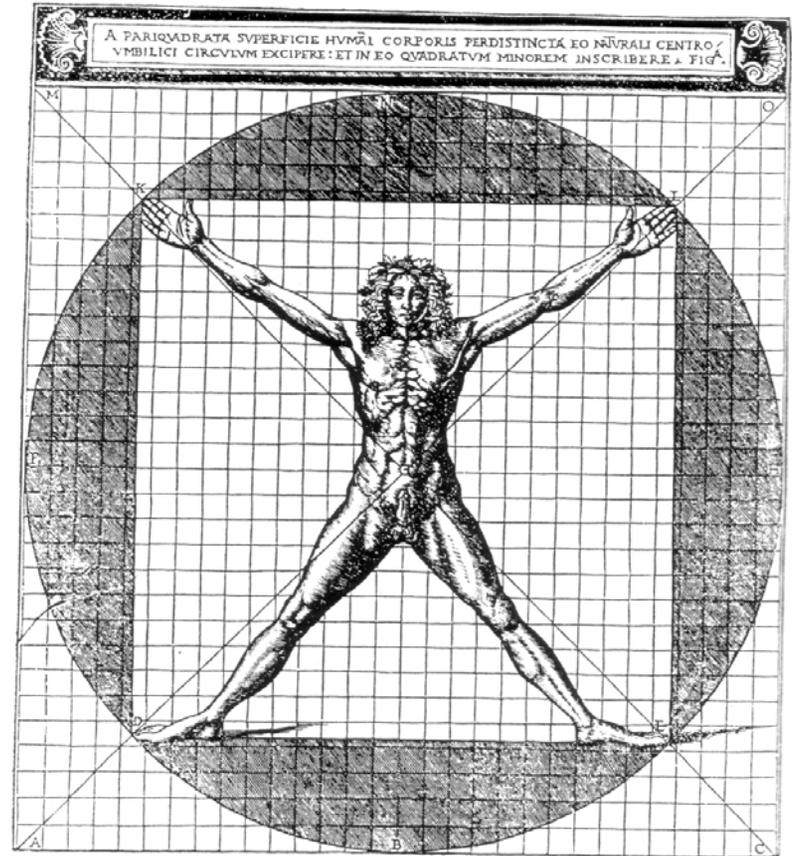
Verschiedene Objekte, gleiches Modell?



Das gleiche Modell

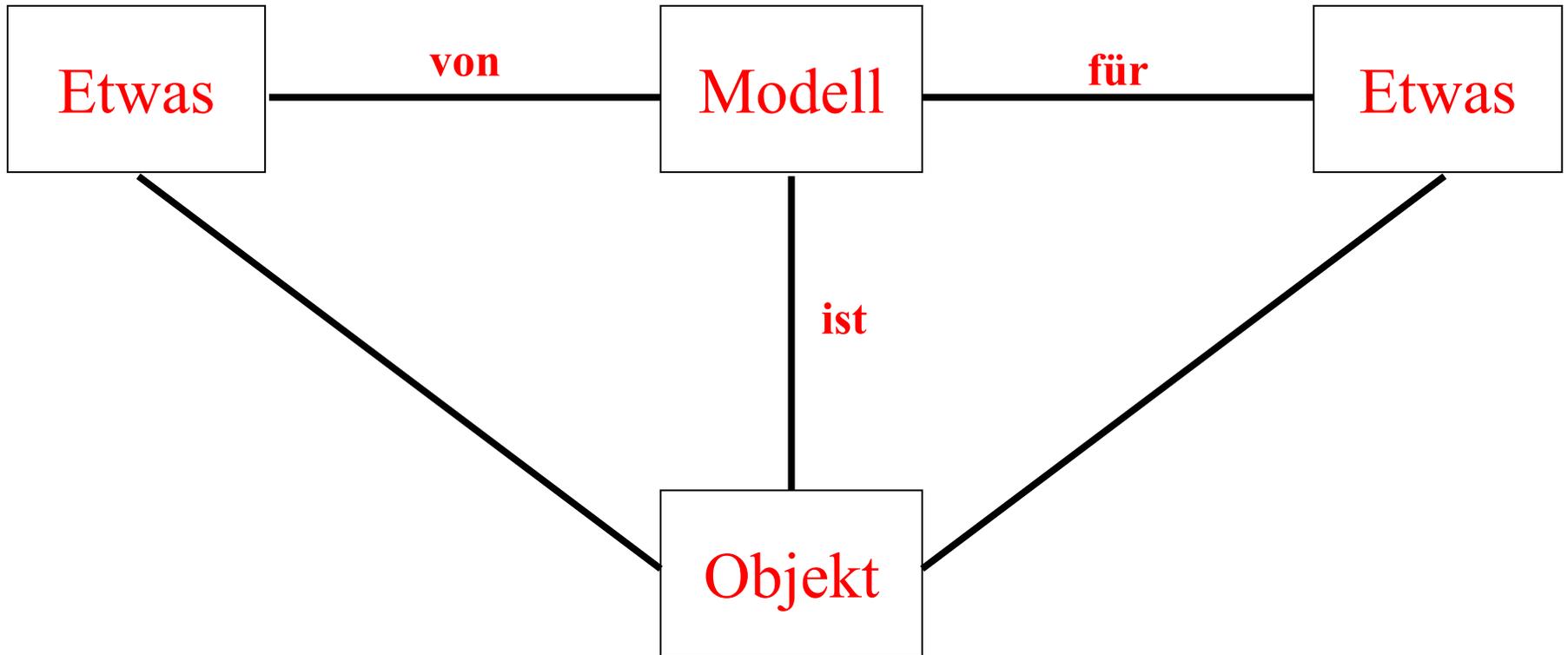


Agrippa

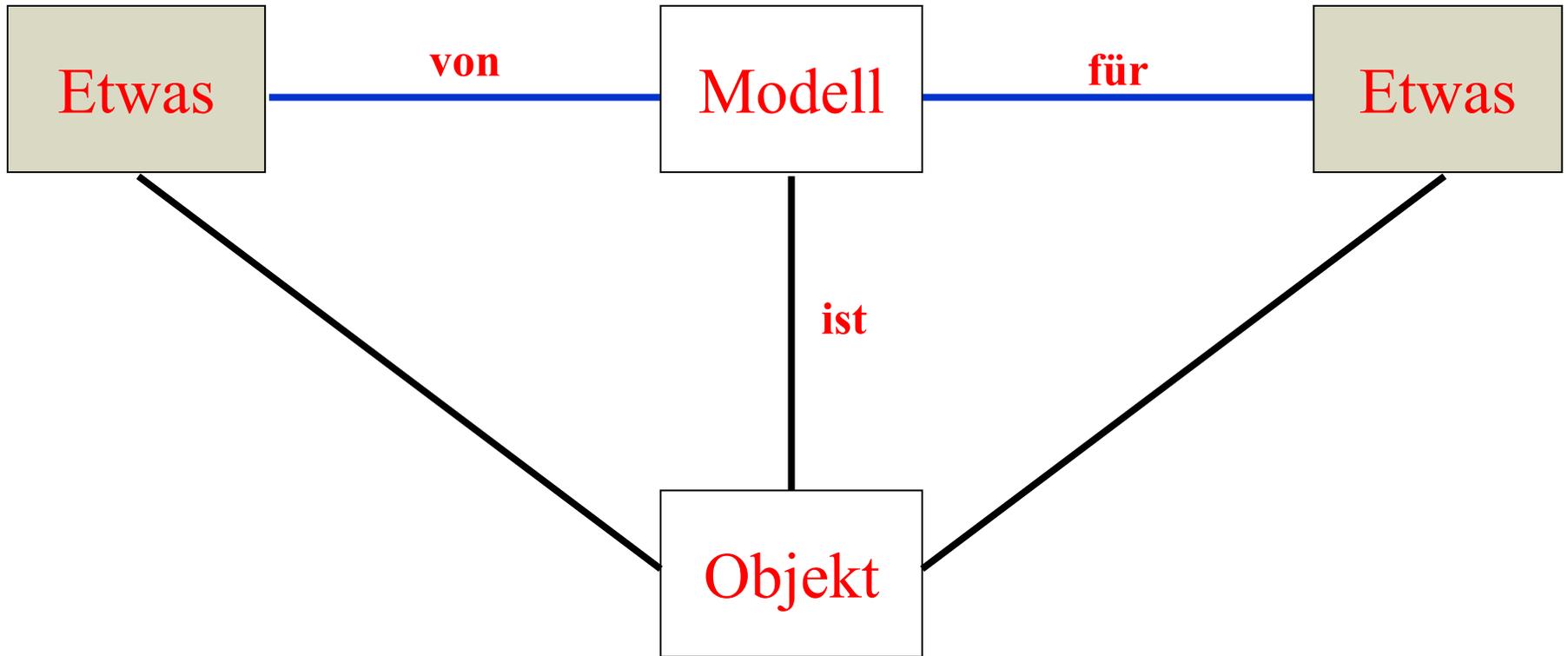


Caesariano

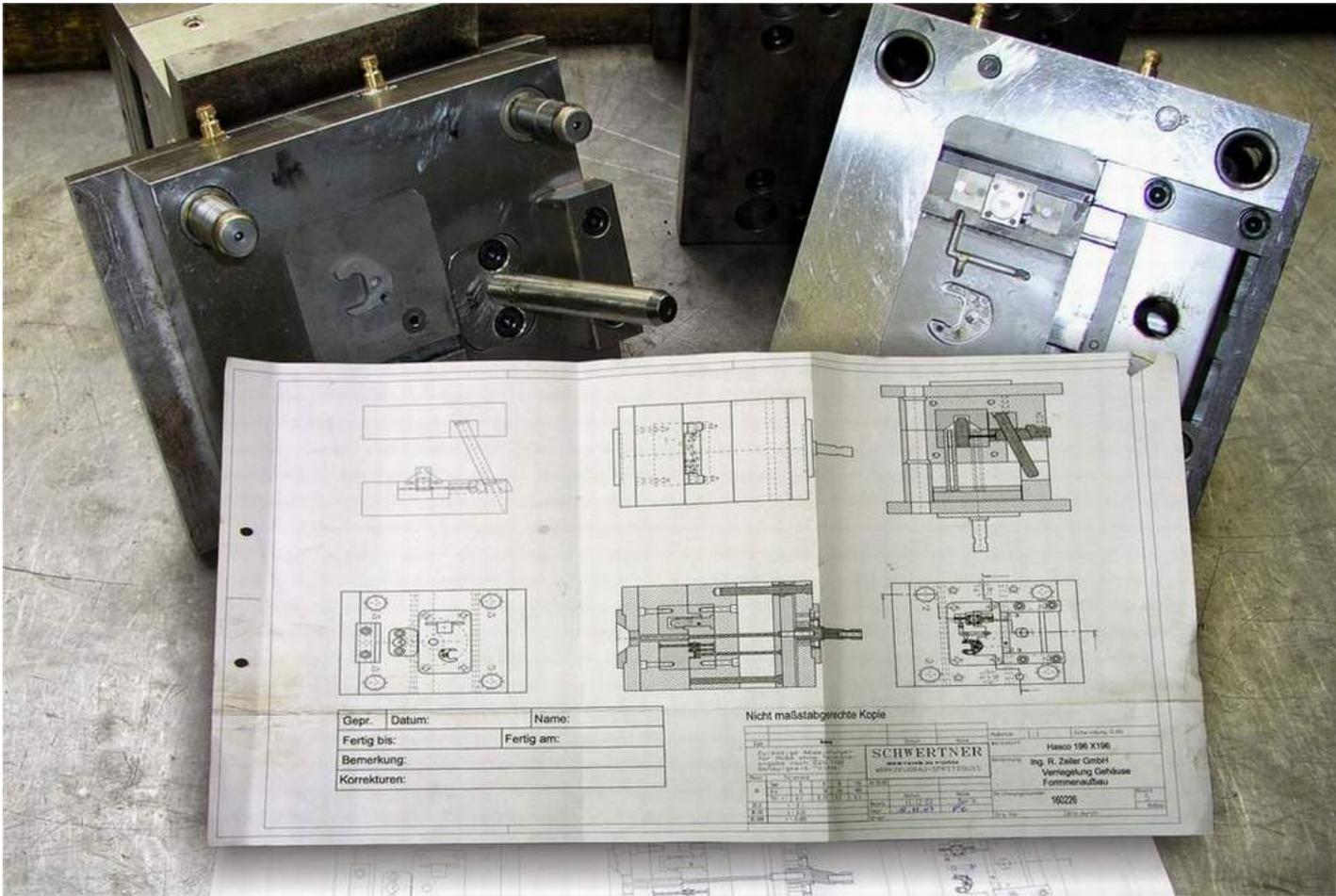
Ontologie des Modellseins



Ontologie des Modellseins



Das Modell für ein Werkstück



Das Modell *von* einem Dom



Ein Modell *vom* oder *für* das Sony-Center?



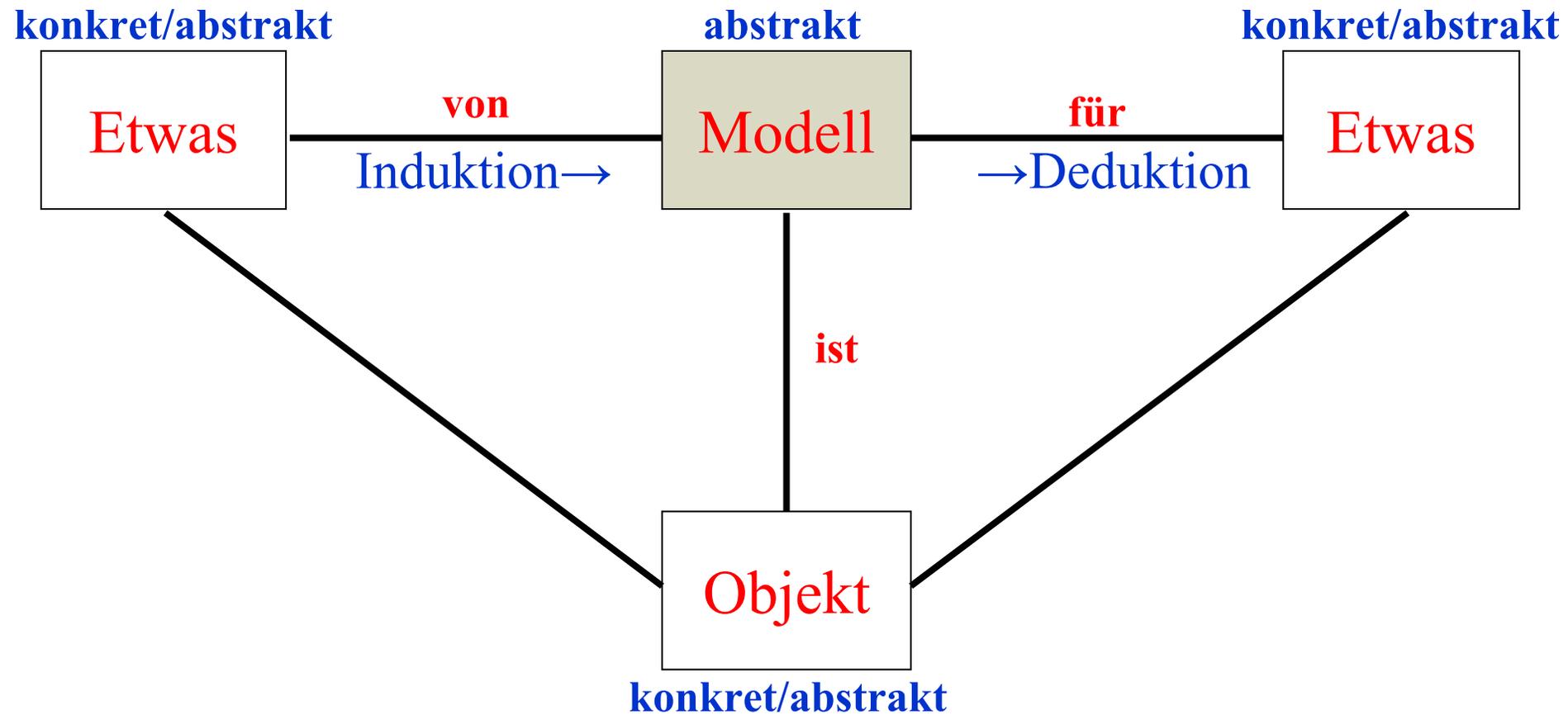
vom Geliebten ein Modell für...



Dibutades

Bernd Mahr

Modalität des Modellseins



Die natürlichen Zahlen

Die Peano-Axiome

© 2001 Horst Hischer

Gemäß Oberschelp, Arnold: Aufbau des Zahlensystems. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1976, S. 14.

Die Peanoschen Axiome

Grundbegriffe:

\mathbf{N} ist eine Menge (Menge der natürlichen Zahlen).

N ist eine einstellige Funktion (Nachfolgerfunktion).

0 ist ein Element (die Null).

Für diese Grundbegriffe gelten die folgenden Axiome:

P 1 $0 \in \mathbf{N}$.

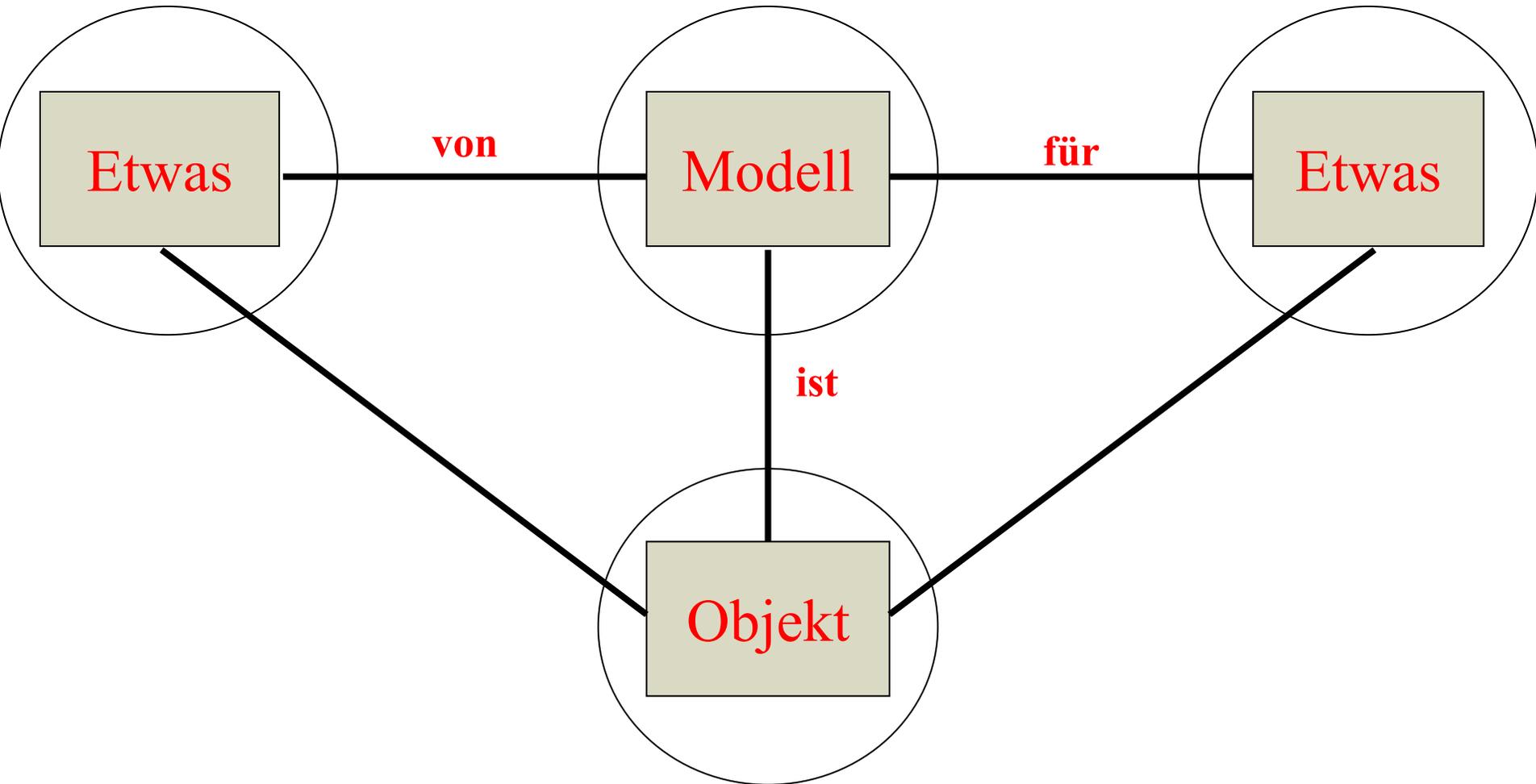
P 2 $x \in \mathbf{N} \Rightarrow N(x) \in \mathbf{N}$.

P 3 $x \in \mathbf{N} \Rightarrow N(x) \neq 0$.

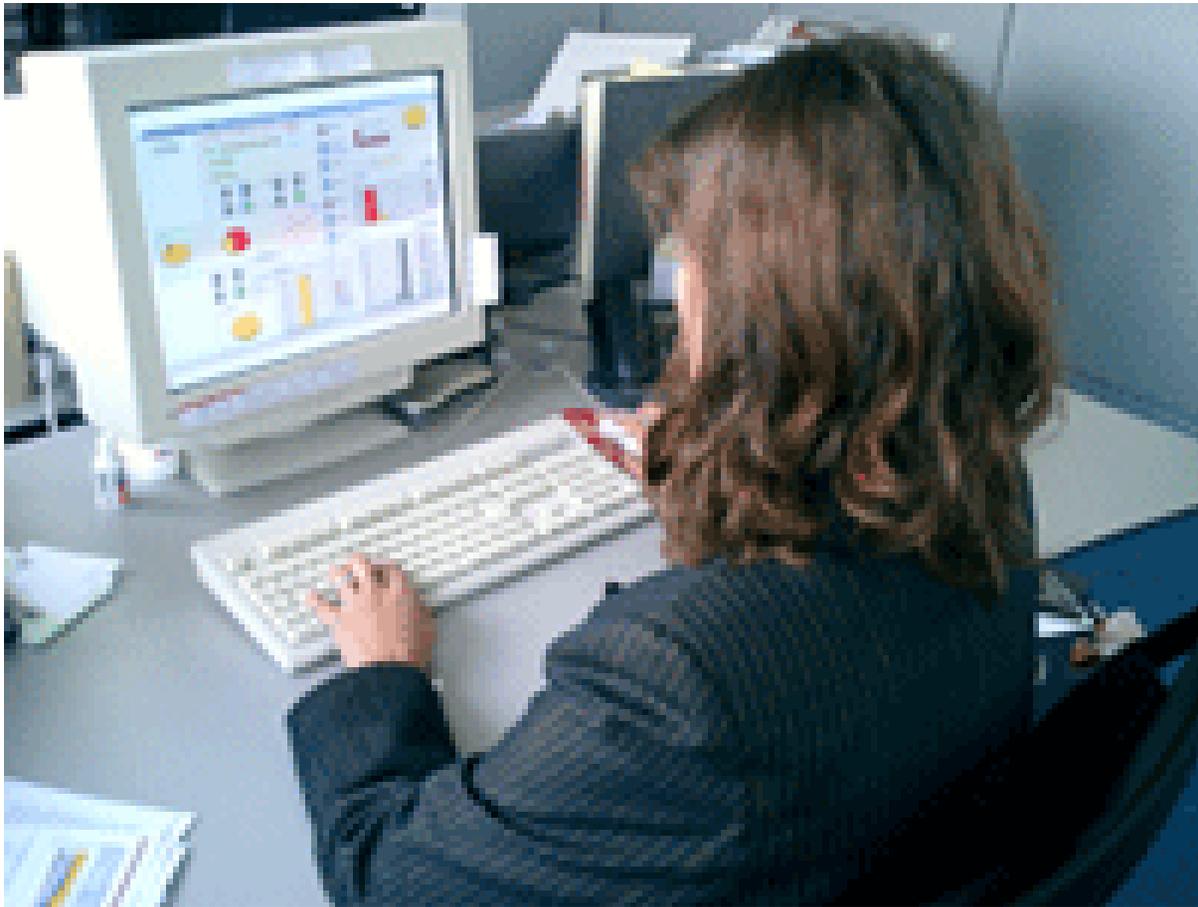
P 4 $x, y \in \mathbf{N} \wedge x \neq y \Rightarrow N(x) \neq N(y)$.

P 5 $0 \in A \wedge \forall x(x \in \mathbf{N} \wedge x \in A \Rightarrow N(x) \in A) \Rightarrow \forall x(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in A)$.

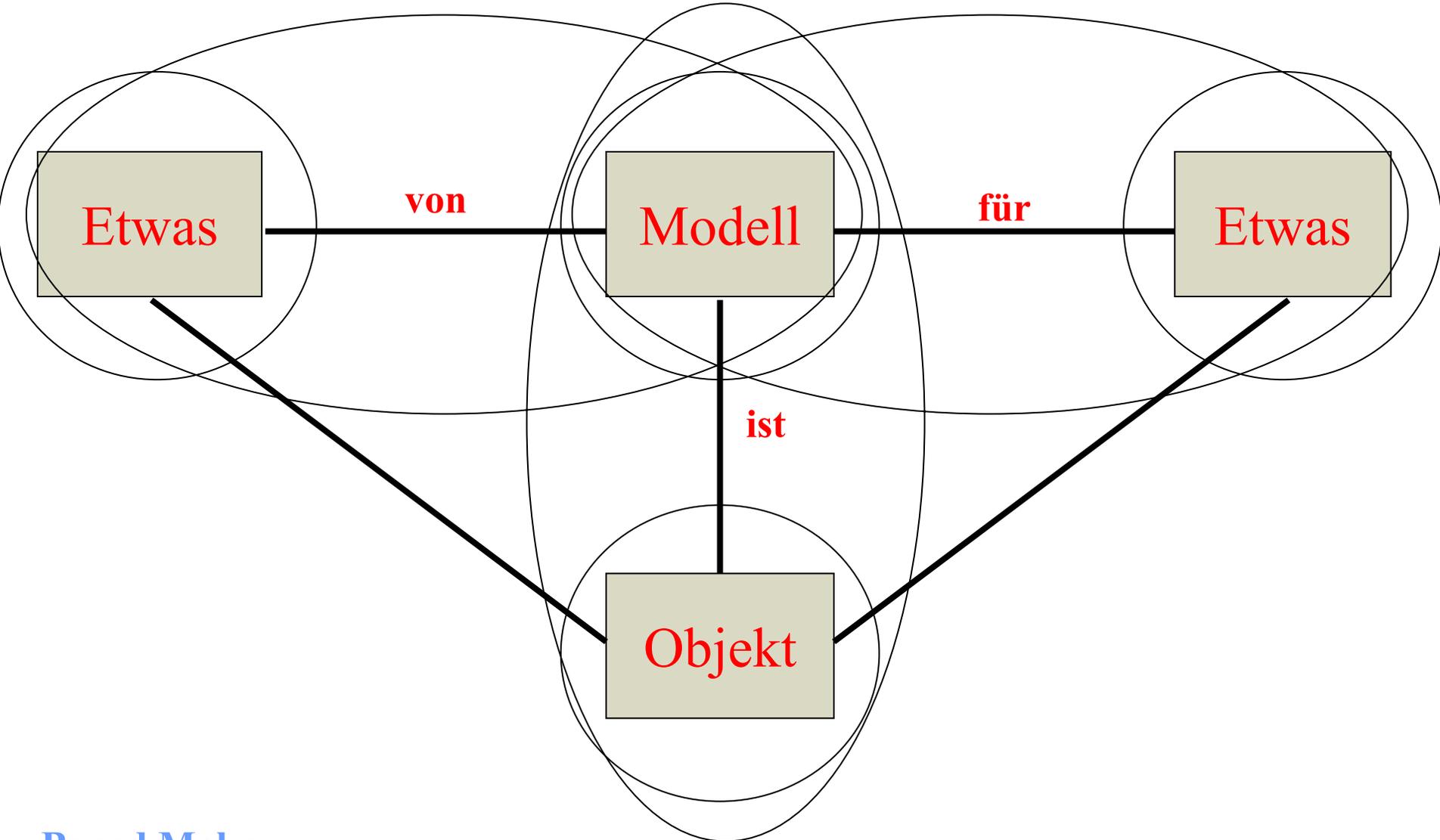
Kontextualität des Modellseins



Die ‚Ordnung‘ des Modellseins



Kontextualität des Modellseins



Disziplinen der Modellierung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = x^2 + y$$

Die ‚Ordnung‘ eines Modells

Architekturmodell für Rechnernetze - Kommunikationsprotokolle

Veranstaltung vom 22.10.98 im Rahmen der Vorlesung

Rechnernetze: Technische Grundlagen

WS 1998/1999 - Veranstaltungsnummer: 320154

Markus Speer

Universitätsrechenzentrum

Westfälische Wilhelms-Universität

Münster

E-Mail: speer@uni-muenster.de

Tel.: (0251) 83-31614, Fax: (0251) 83-31653

22.10.98 Markus Speer: Architekturmodell für Rechnernetze - Kommunikationsprotokolle

1

Die Funktion von Modellen

Die allgemeine Funktion von Modellen ist die **Funktion des Transports**. Dadurch erfüllen Modelle als Modelle ihren Zweck.

Die Transportfunktion von Modellen begründet maßgeblich das Modellsein eines Gegenstands. Sie besteht in der **Möglichkeit** des Transport eines **Cargo**. Der Transport erfolgt mit der Nutzung des Modells. **Präzision** und **Garantien** des Transports unterscheiden Modelle von *Metaphern*.

Der Cargo in Freges Modell der Zahl

Das Modell

Eine Zahl ist eine Bijektionsklasse in der Klasse aller Mengen

Beispiel

Die Zahl 49 ist die Klasse aller Mengen, deren Mächtigkeit gleich der Mächtigkeit der Menge der Lottozahlen ist.

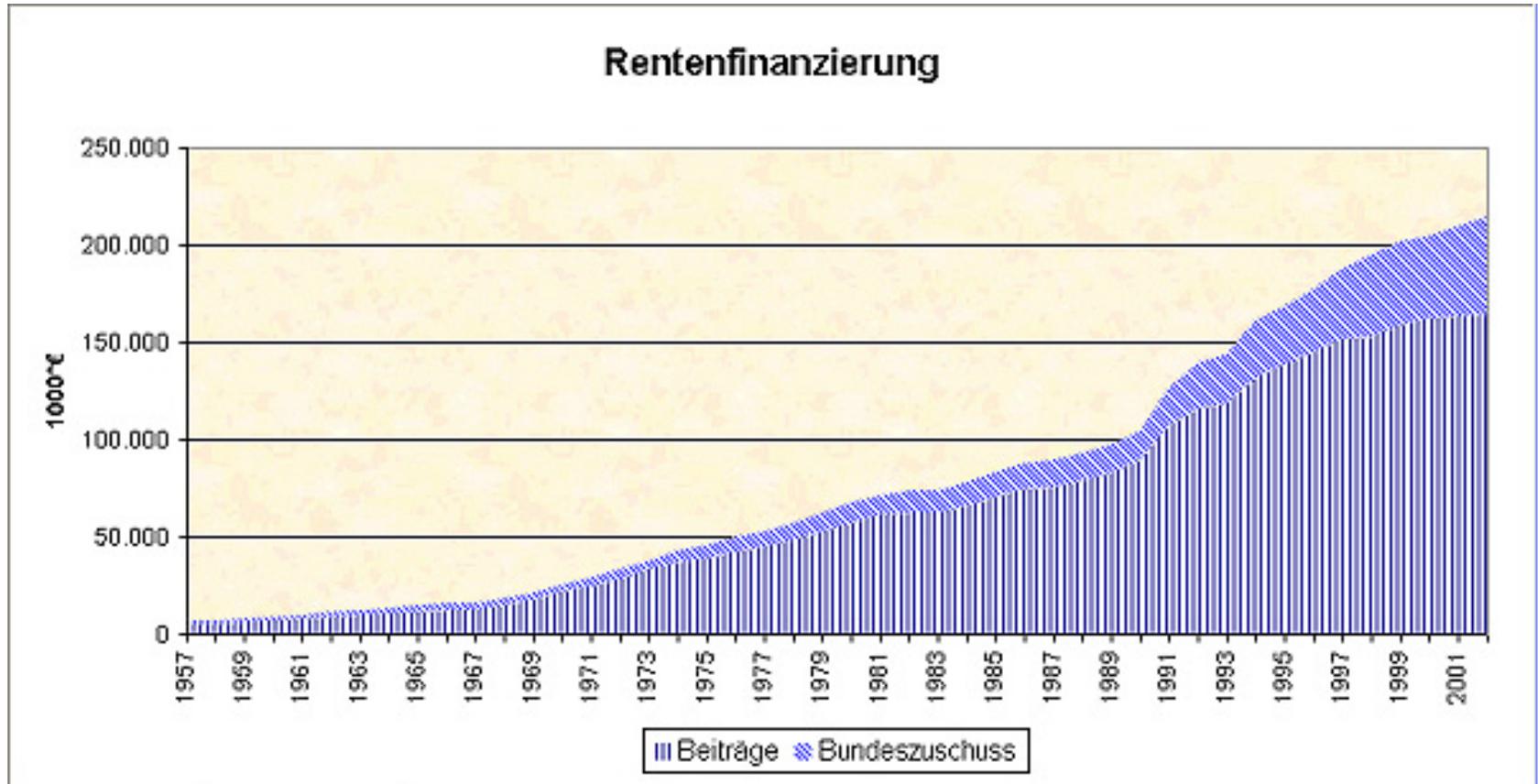
Die Transportfunktion

Das einzige, was die Mengen einer Bijektionsklasse gemeinsam haben, ist ihre Gleichmächtigkeit. Die Unterscheidung der der Bijektionsklassen ist die Differenzierung der Zahlen. **Der Cargo des Modells ist die Klasse der Kardinalzahlen.**

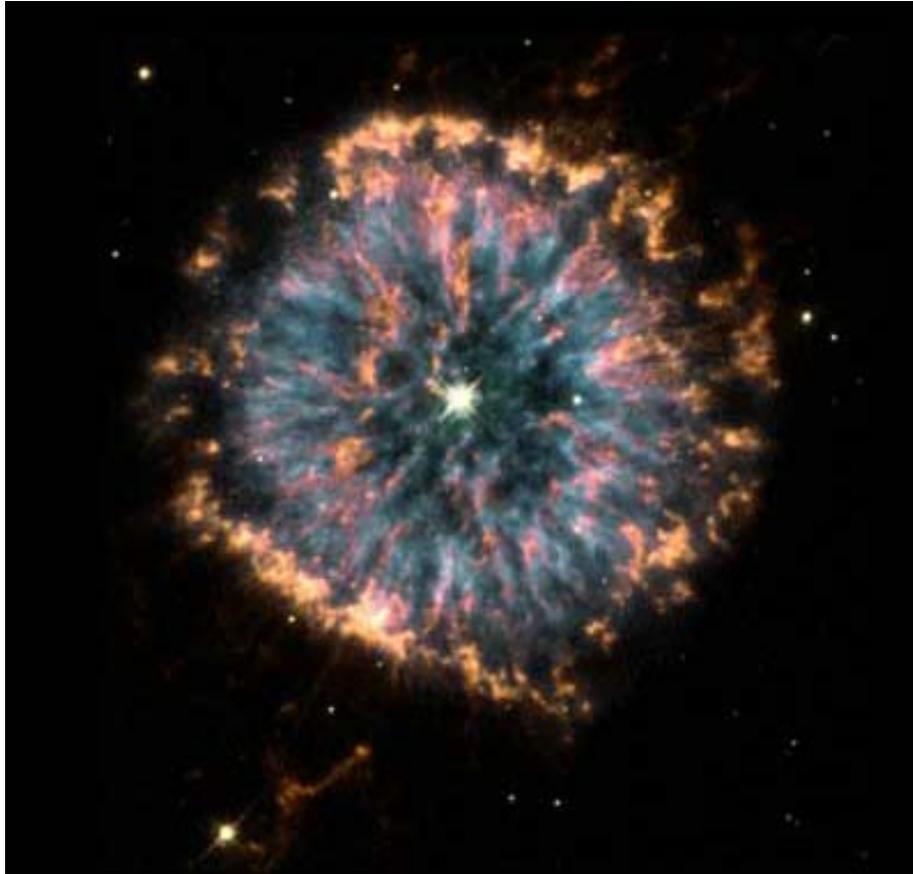
Was ist der Cargo dieses Modells?



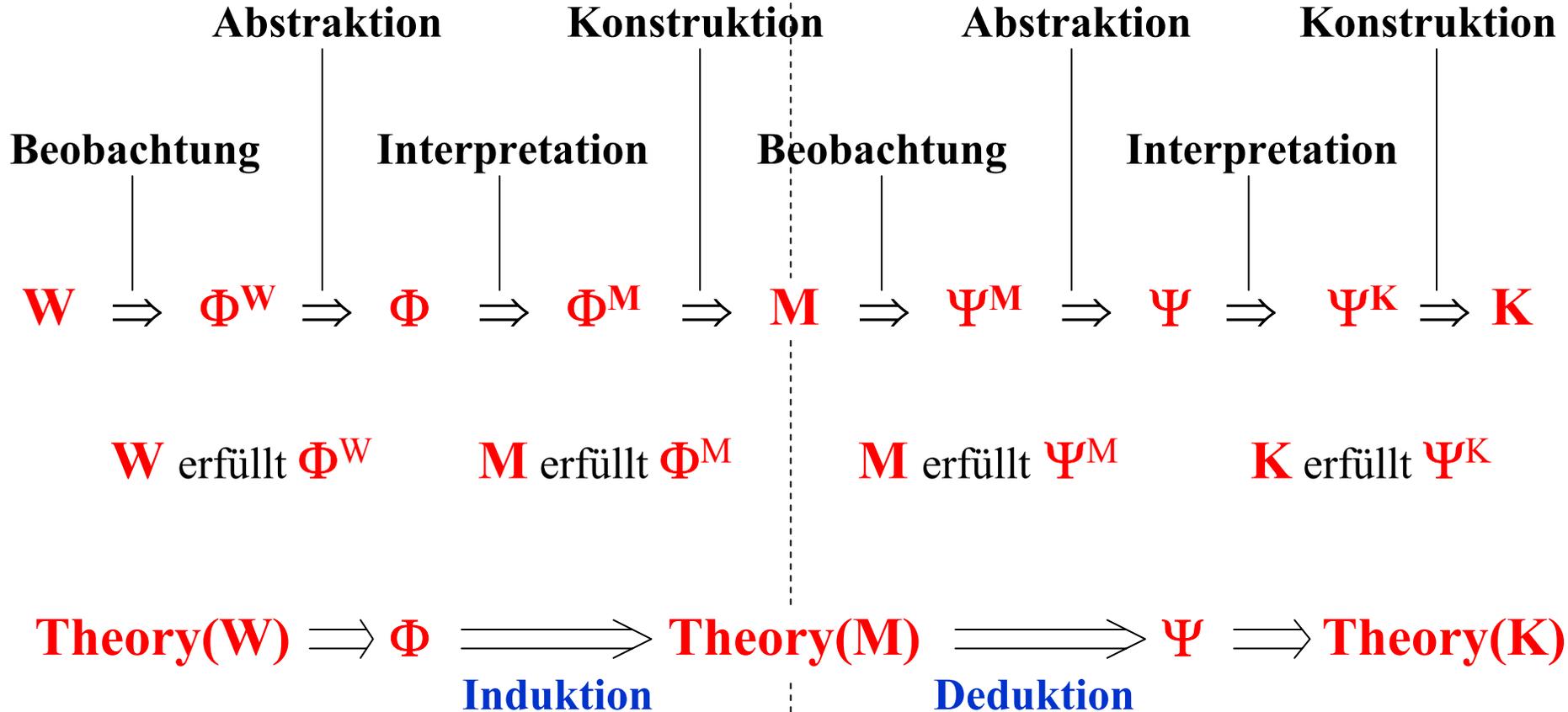
Der Anstieg des Bundeszuschusses



Die Metapher des Urknalls



Die Logik des epistemischen Musters



5.

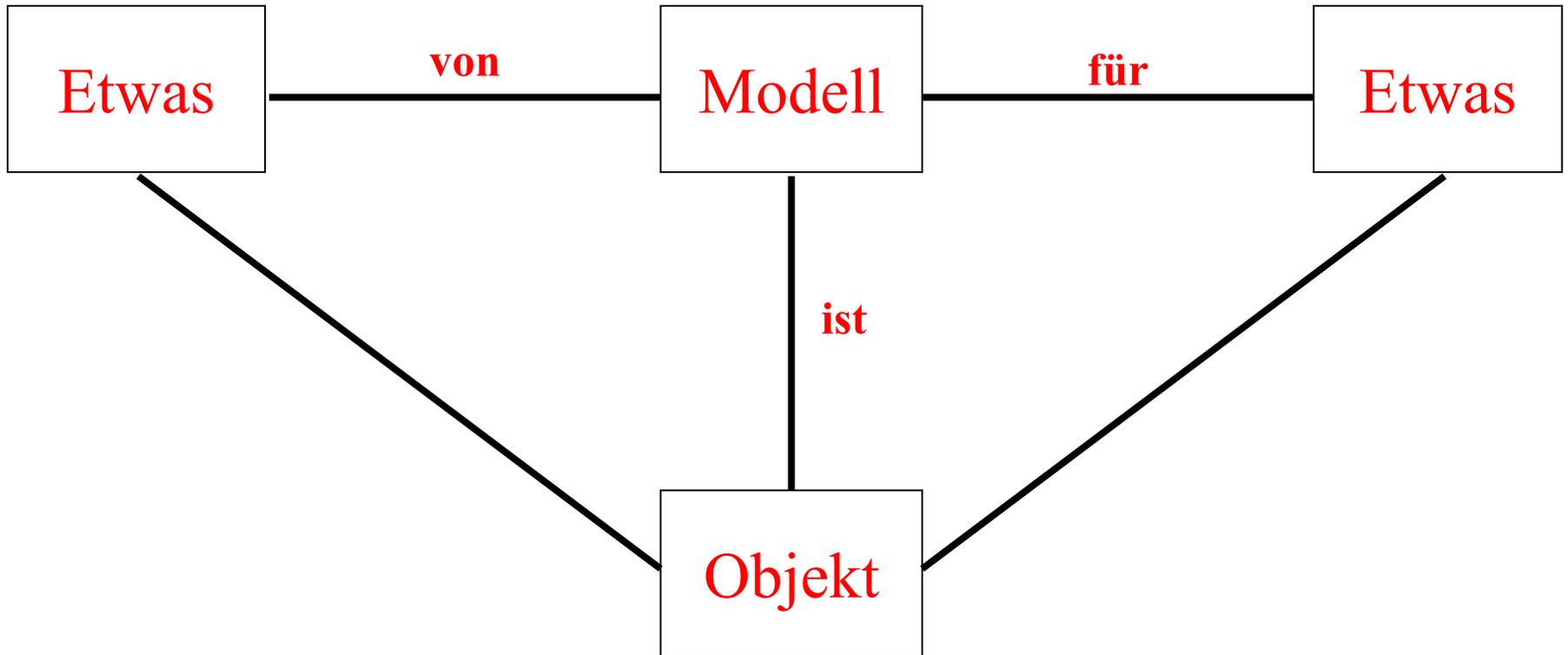
Aspekte des Modellseins

In systematischer Betrachtung lassen sich auch die Aspekte des Modellseins in vier Gruppen einteilen:

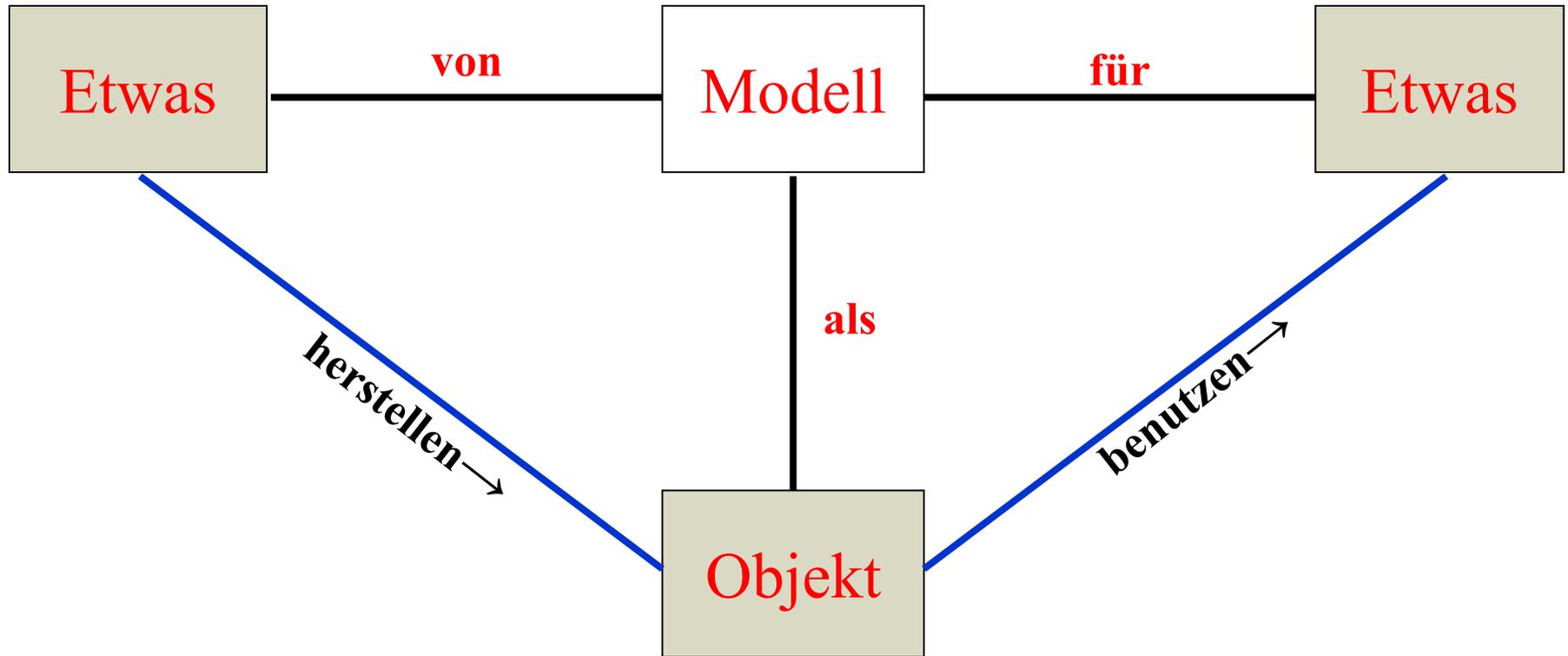
- **Praktik** des Modellseins
- **Validität** des Modellseins
- **Wirkungsmacht** von Modellen
- **Dynamik** des Modellseins

Die Aspekte des Modellseins betreffen die Kontexte und Einflussgrößen, denen das Urteil des Modellseins über die Instanziierung der Merkmale des Modellseins hinaus unterworfen ist.

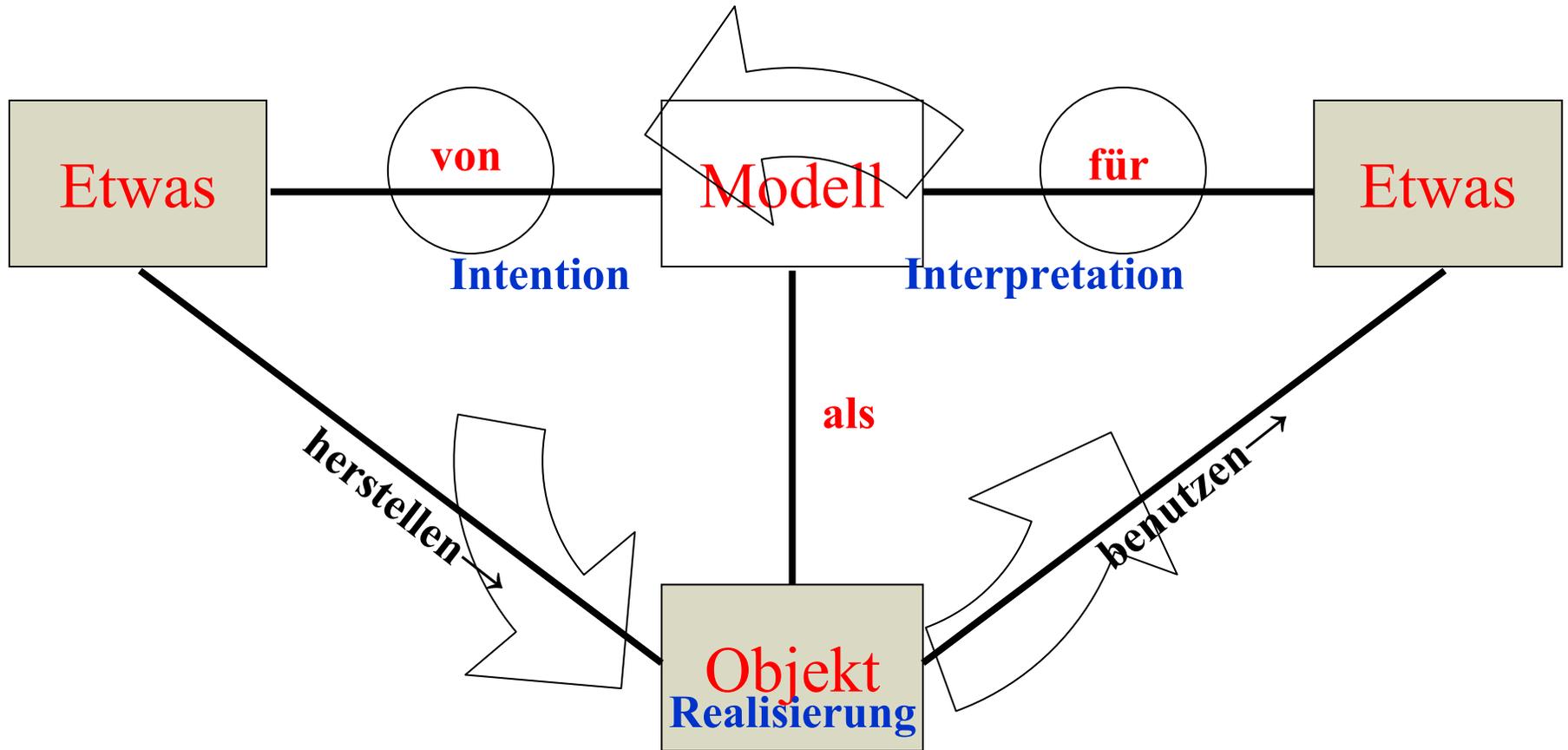
Ontologie des Modellseins



Herstellen und Benutzen von Modellen



Reflexivität der Modellierung



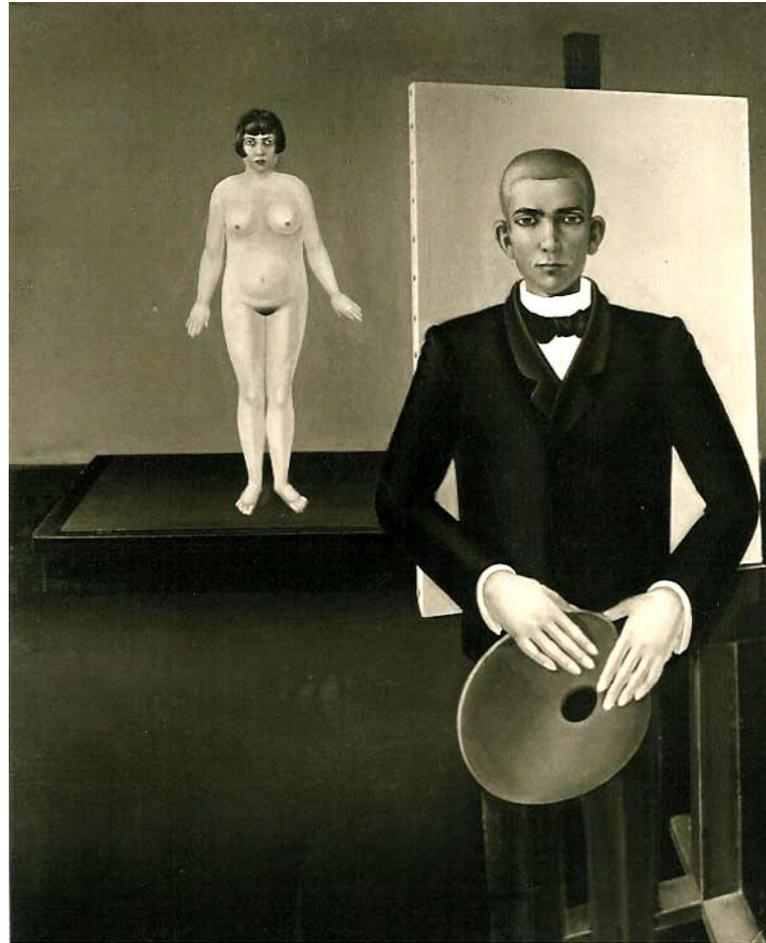
Die Herstellung eines Modells



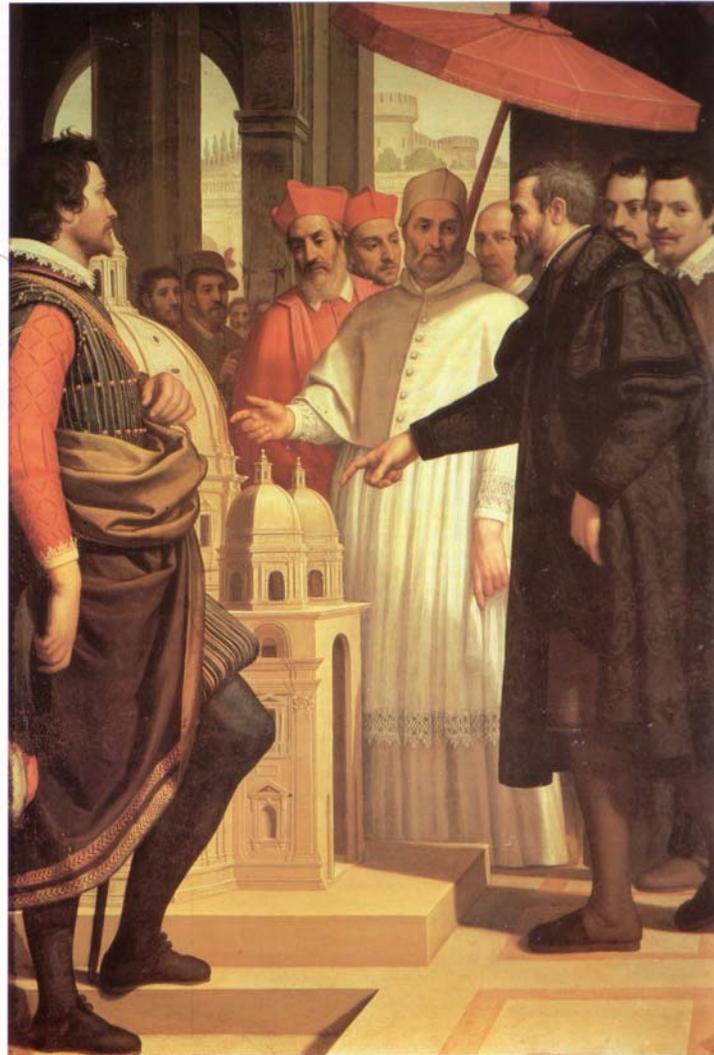
Die Wahl eines Modells



Die Benutzung eines Modells



Michelangelo präsentiert ein Modell



Die Validität des Modellseins

Das Urteil des Modellseins unterliegt selbst der Beurteilung. Maßgebende Kriterien dieser **Metaurteile** betreffen

- die **Begründetheit**, mit der in einem Gegenstand ein Modell gesehen wird
- die **Effektivität**, mit der ein Modell seine Funktion des Transports erfüllt
- die **Akzeptanz**, die das Modellurteil in der Gemeinschaft findet

Die Akzeptanz des Modells vom Urknall

Was sagt „die Wissenschaft“ ?

Urknall

Hier, die ersten
vier Sextilliardestel Sekunden
(ca. 10^{-40} Sek.) nach dem Urknall :

Vor 15 Milliarden Jahren
entstand nach Phantasie der Physiker
das Universum aus dem Nichts.

Woher die Materie kam, dürfe man nicht fragen. Sagen sie. Das sei nicht erlaubt. Denn schliesslich sei das allgemein akzeptiert und deshalb wahr.



Die Vorstellung vom Urknall



Die Wirkungsmacht von Modellen

Wir stellen Modelle zwischen uns als wahrnehmende, erkennende, verstehende, urteilende oder handelnde **Subjekte** und die Welt als wahrnehmbares, beobachtbares, wirkendes, zu beurteilendes oder herzustellen **Äußeres**.

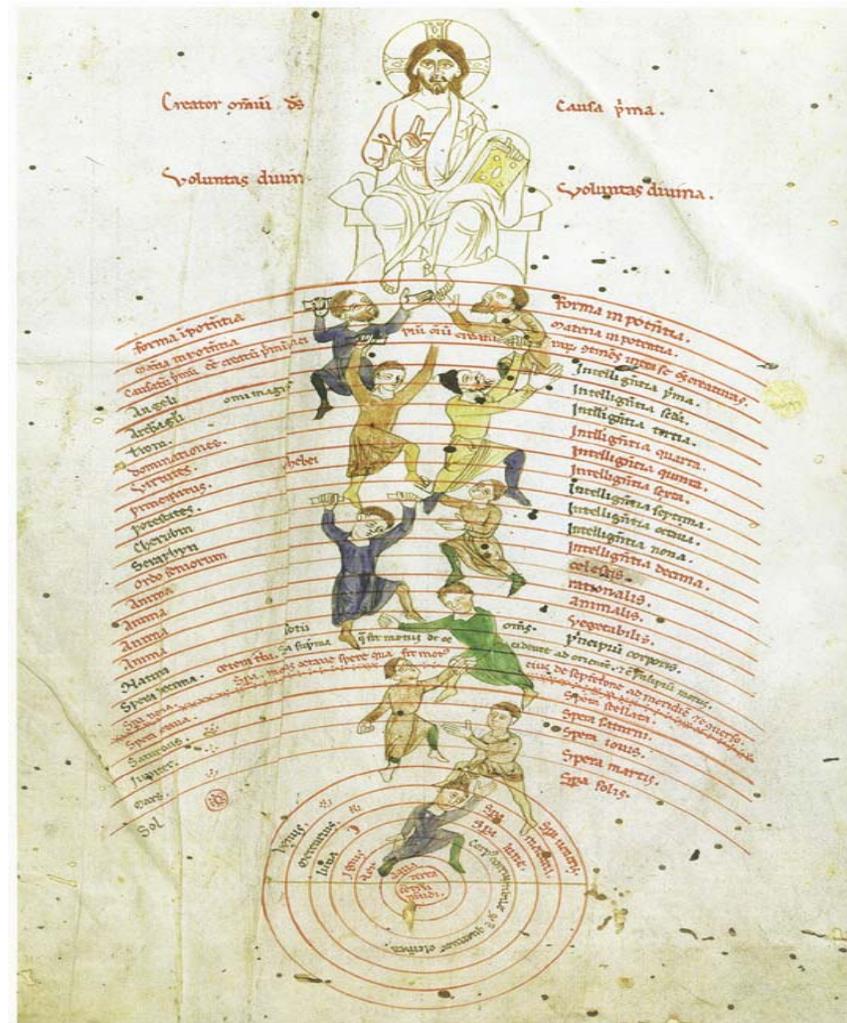
Die Wirkungsmacht von Modellen ergibt sich aus der Rolle, die Modelle durch ihre Transportfunktion in

- **Werkprozessen**
- **Erkenntnisprozessen**
- **Unternehmensprozessen**

spielen.

Die Macht von Modellen ist das Ergebnis ihrer Wirkungsmacht

Die Ordnung der Welt



12. Jahrhundert

Athanasius Kircher

Tabula influxus 10 Sephiroth.

1 Kether. Corona.	influxit in	Seraphim.	& per hos in sphæ- ram.	Primi mobilis.
2 Cochma. Sapiencia.		Cherubim.		Firmamenti.
3 Binah. Intelligentia.		Thronos.		Saturni.
4 Gedula. Magnitudo.		Dominaciones.		Iouis.
5 Geburath. Fortitudo.		Potestates.		Martis.
6 Tiphereth. Pulchritudo.		Virtutes.		Solis.
7 Nizah. Victoria.		Principatus.		Veneris.
8 Hod. Honor.		Archangelos.		Mercurij.
9 Iesod. Fundamentum.		Angelos.		Lunæ.
10 Malcuth. Regnum.		Animasticum ordinem.		Mundi ele- mentaris.

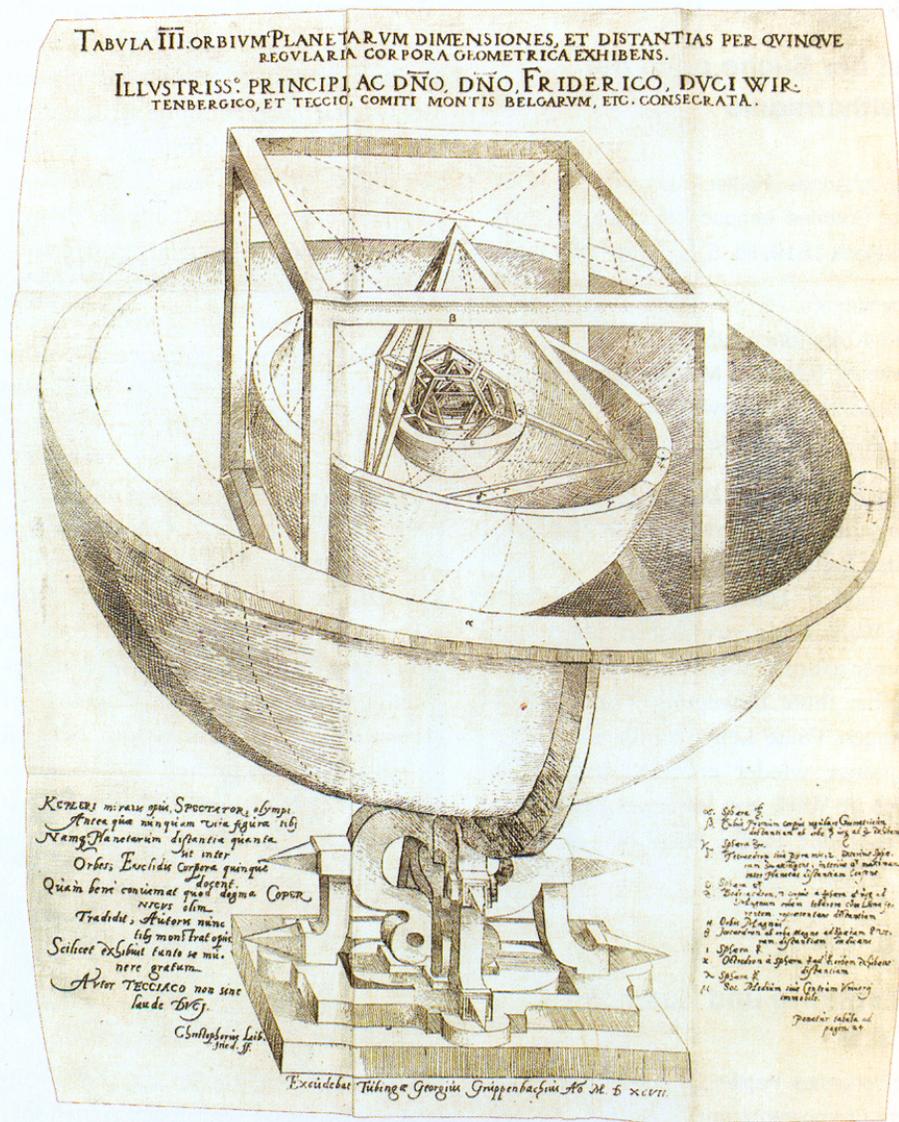
1602 - 1680

Die Dynamik des Modellseins

Die Kontexte des Modellseins und des Modellurteils können einem starken Wandel unterliegen. Durch Veränderungen in der Zeit und durch Situationswechsel ergibt sich eine Dynamik des Modellseins, die wir als

- Fortschritt
 - Auftreten von Spannungen, Verwerfungen oder Brüchen
 - Verlust des Modellseins
- auffassen.

Keplers Weltmodell



1571 - 1630

6.

Gebrauchsweisen des Modellseins

Eine Klassifikation der gängigen Gebrauchsweisen von Modellen erklärt mögliche Zweckbestimmungen als

- Repräsentanten
- Mittel der Formgebung
- Technik der Aufteilung
- Mittel der Anschauung
- Exemplare
- Vorbilder
- Entwürfe
- Ausdruck der Vorstellung
- Denkmöglichkeit
- Resultat der Abstraktion
- Bezugsgröße
- Form des Wissens

7.

Das Modell der Schönheit

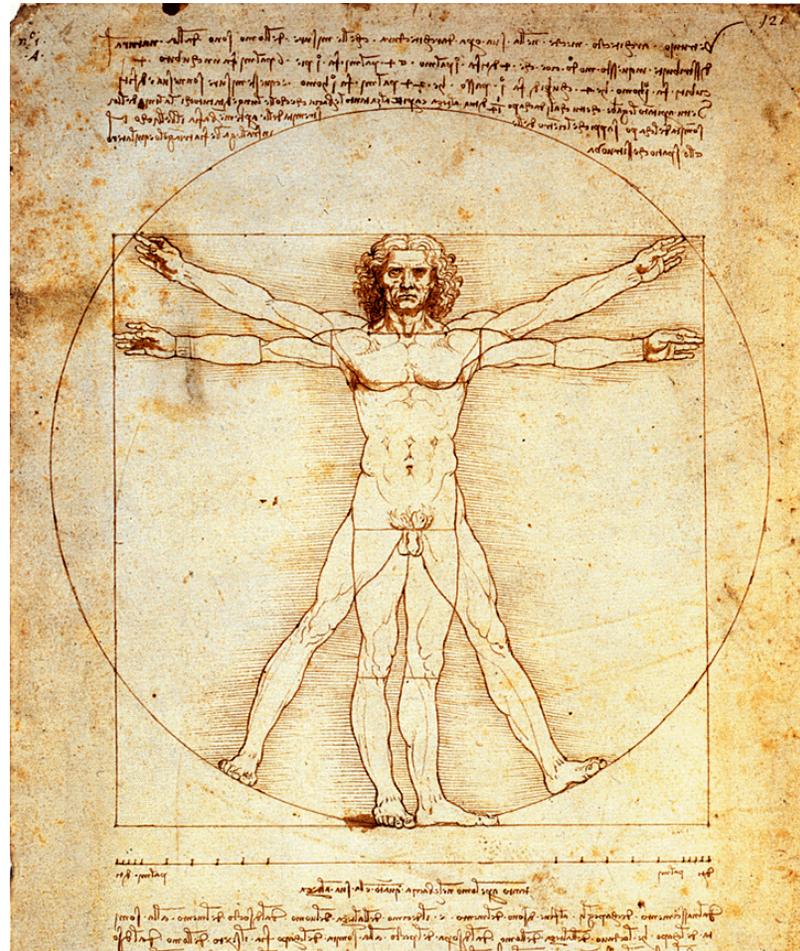
- Der Mensch als Vorbild der Eurythmie in der Architektur
- Das Modell der Symmetrie durch den *modulus*
- Die Säulenordnungen
- Die Messbarkeit der Schönheit
- *modulus* und Modulor

Der Mensch als Vorbild

„Denn kein Tempel kann ohne Symmetrie und Proportion eine vernünftige Formgebung haben, wenn seine Glieder nicht in einem bestimmten Verhältnis zu einander stehen, **wie die Glieder eines wohlgeformten Menschen**“.

de architectura decem libri, Vitruv

Die Vitruvsche Figur



Leonardo
um 1490

Der Mensch als Vorbild

„So erfanden sie [die Athener] durch zwei unterschiedliche Entlehnungen (vom menschlichen Körper) zwei Säulen, eine vom männlichen Körper ohne Schmuck, nackte Schönheit, die andere mit fraulicher Zierlichkeit, fraulichem Schmuck und fraulichem Ebenmaß...setzten für die Höhe der dorischen Säulen sieben Säulendurchmesser fest, für die ionischen neun... die korinthisch genannt wird, ahmt jungfräuliche Zartheit nach...”

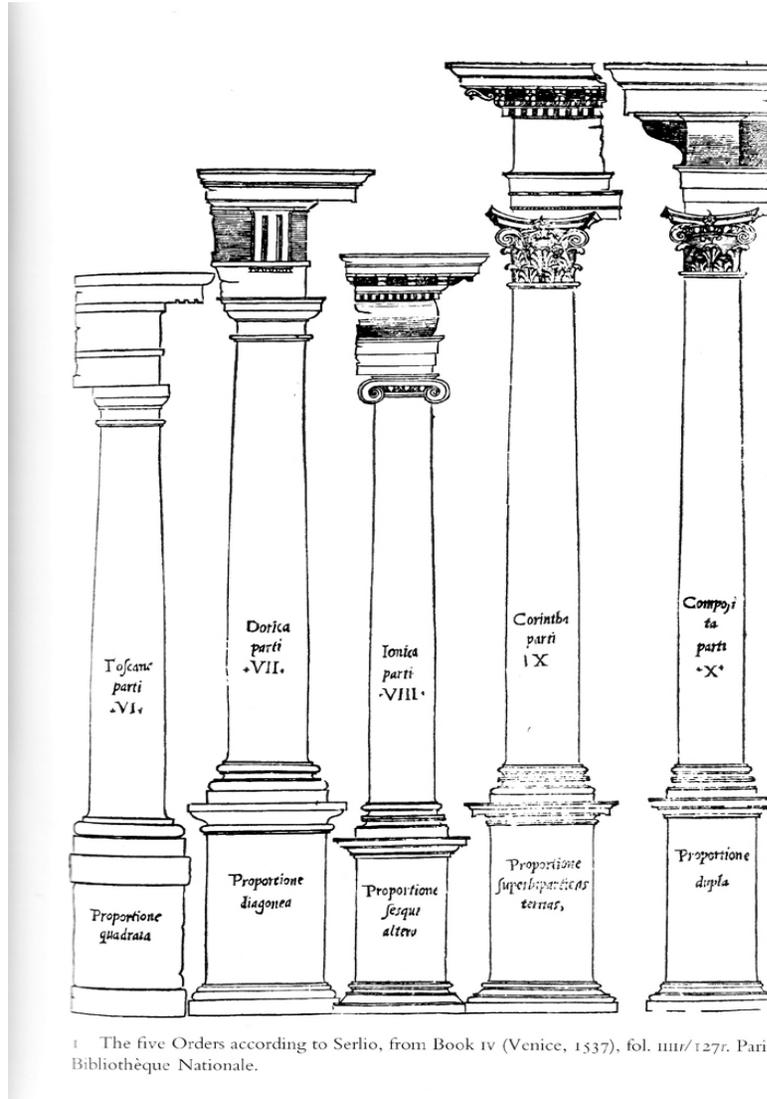
de architectura decem libri, Vitruv

Die Geburt der korinthischen Abmessungen



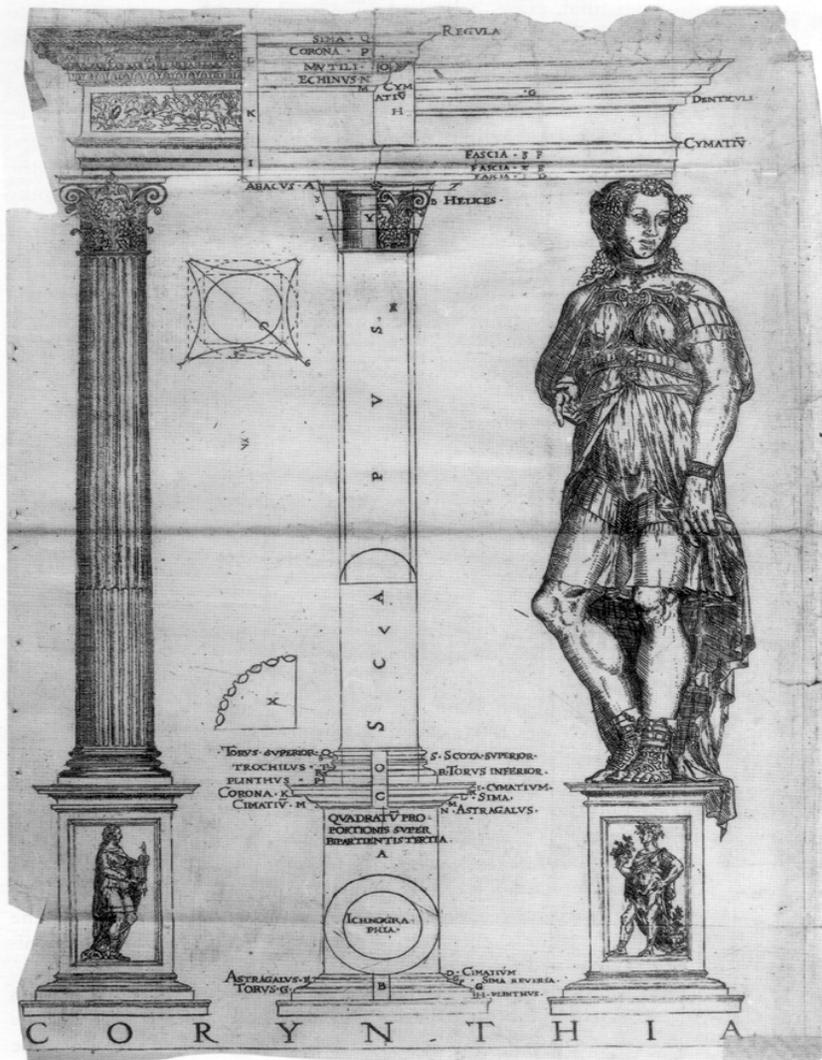
Callimachus

Die Säulenordnung nach Serlio

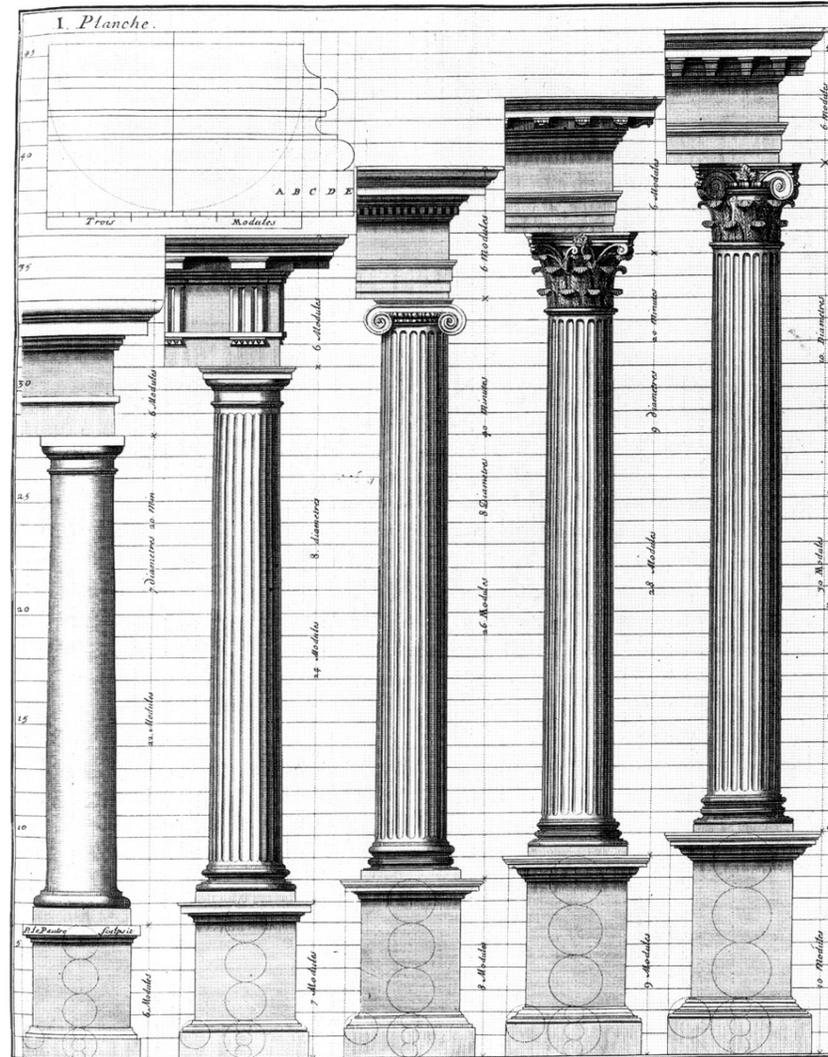


1 The five Orders according to Serlio, from Book IV (Venice, 1537), fol. IIII/127r. Paris, Bibliothèque Nationale.

Korinthische Ordnung als Aphrodite

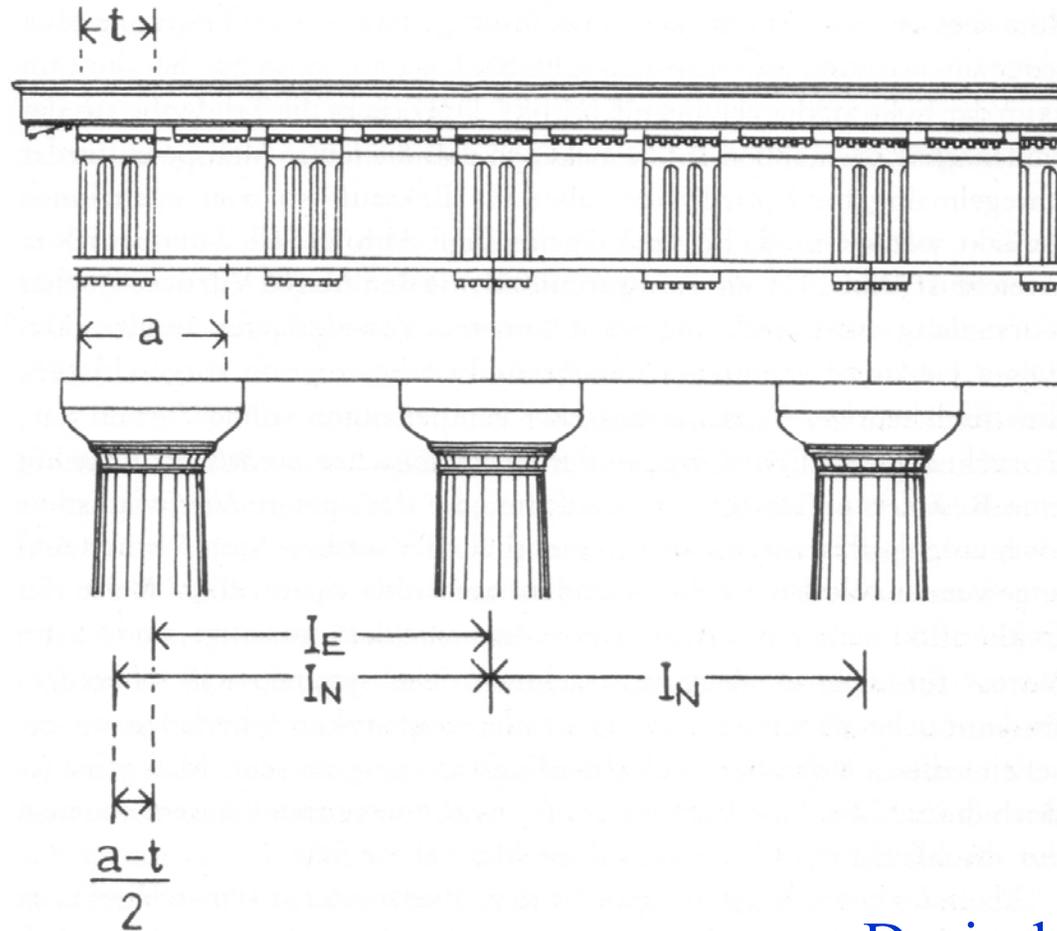


Die Säulenordnung nach Perrault



1683

Triglyphen, Metopen und Eckkontraktion

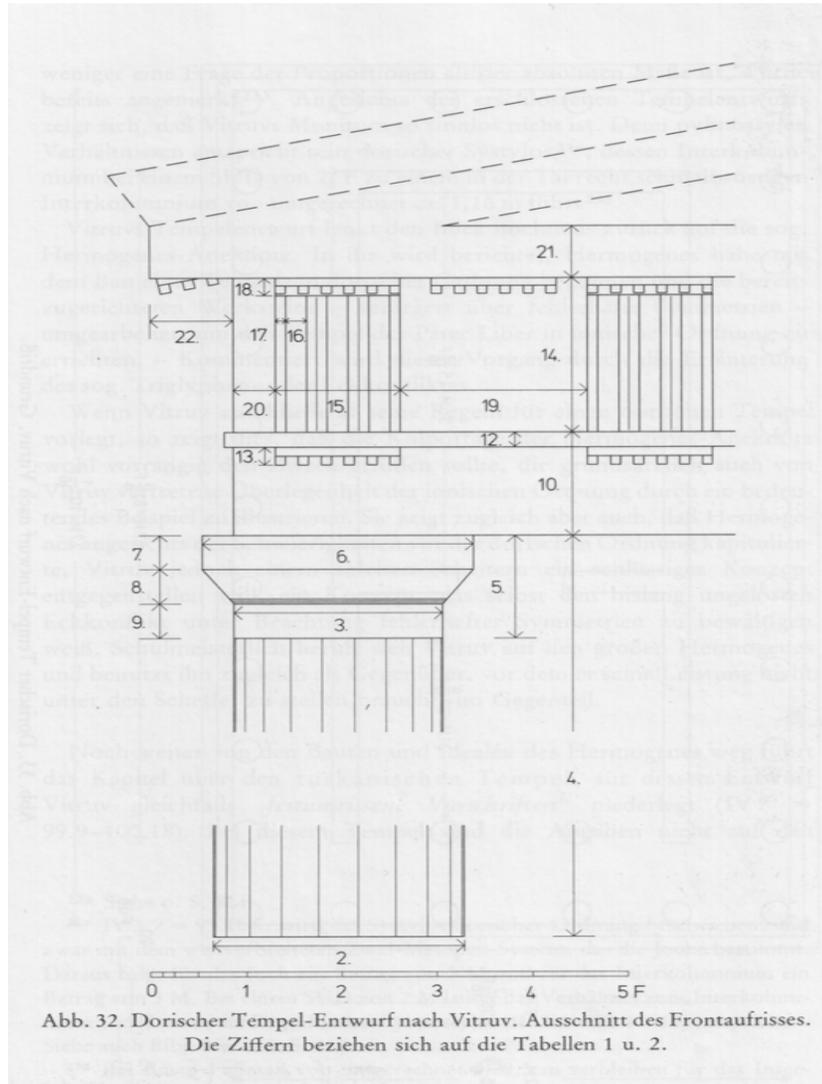


Dorische Ordnung

Metopen des Hephaestion



Eckrestmetopen



Edinburgh University im Stile Vitruvs

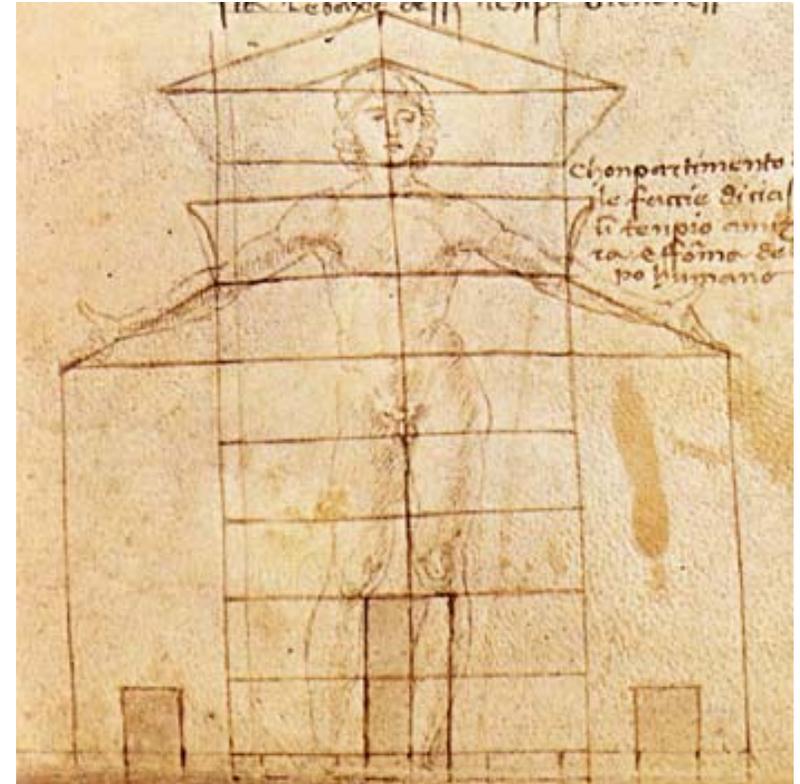
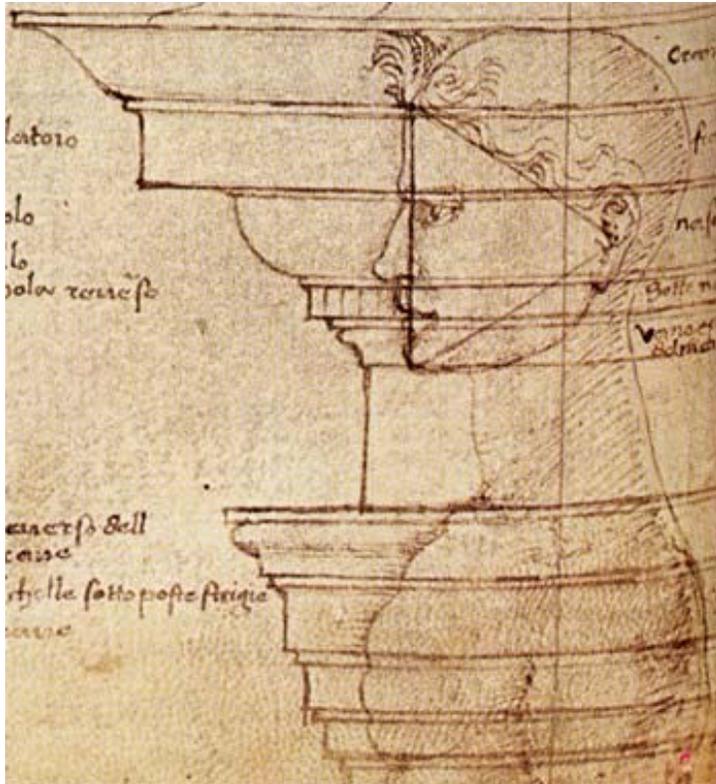


Der Mensch als Vorbild

„Den Körper des Menschen hat nämlich die Natur so geformt, dass das Gesicht vom Kinn bis zum oberen Ende der Stirn und dem untersten Rand des Haarschopfes $\frac{1}{10}$ beträgt, die Handfläche von der Handwurzel bis zur Spitze des Mittelfingers ebensoviel...von der Mitte der Brust bis zum höchsten Scheitelpunkt $\frac{1}{4}$...der Fuß aber $\frac{1}{6}$ der Körperhöhe... auch die übrigen Glieder haben ihre eigenen Proportionen der Symmetrie, durch deren Beachtung auch die berühmtesten Maler und Bildhauer großen und unbegrenzten Ruhm erlangt haben”

de architectura decem libri, Vitruv

Das menschliche Maß



Alberti über die Schönheit

„Die Schönheit ist eine Übereinstimmung und ein Zusammenhang der Teile zu einem Ganzen, das nach einer bestimmten Zahl, einer besonderen Beziehung und Anordnung ausgeführt wurde, wie es das Ebenmaß, das heißt das vollkommenste und oberste Naturgesetz fordert.“

Es besteht die Möglichkeit zum Ausdruck der Individualität, solange es nicht zu „Ungeheuern mit ungleichen Schultern und Seiten“ kommt.

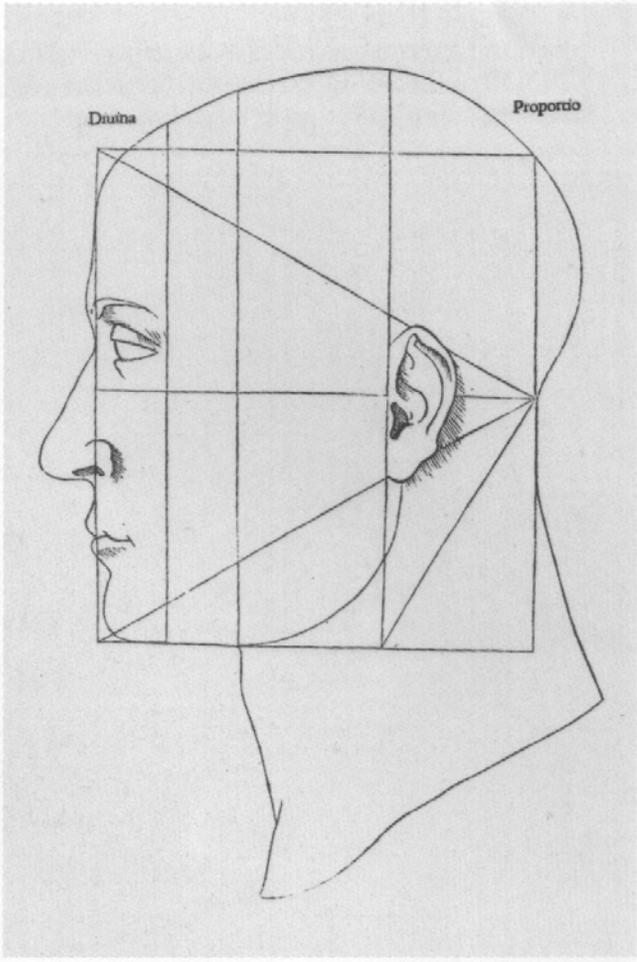
Zehn Bücher über die Baukunst, Alberti, ca. 1450

Alberti über die Schönheit

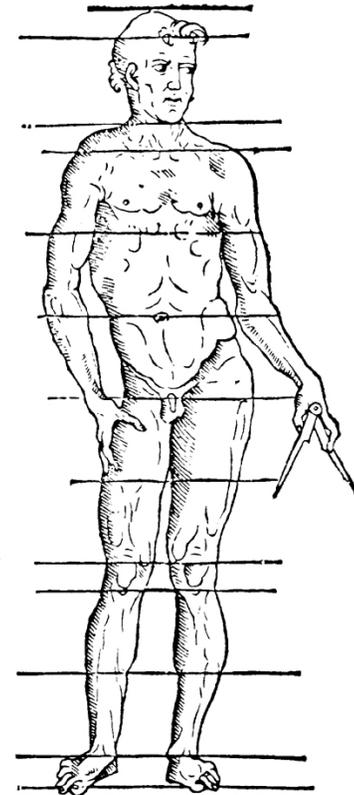
„Doch der Kürze halber möchte ich die Definition geben, dass die Schönheit eine bestimmte gesetzmäßige Übereinstimmung aller Teile, was immer für einer Sache, sei, die darin besteht, dass man weder etwas hinzufügen noch hinweg nehmen oder verändern könnte, ohne sie weniger gefällig zu machen.“

Zehn Bücher über die Baukunst, Alberti, ca. 1450

Die Vermessung des Menschen



vn tercio: este tercio es lo que sube mas la cabeza q̄ la frēte: el pecho cō tiene otro rostro: el estomago hasta el ombligo otro: del ombligo hasta el miēbro genital ay otro: en cada vno de los muslos se mīden dos: y en cada vna de las espīnillas otros dos. De los touillos alas plantas vn tercio: en las chuecas de las rodillas otro: en el pescuego otro tercio. de manera que se mōta por todo los dichos nueue rostros y vn tercio segū q̄ por la presente figura se muestra. ¶ De muchas maneras se puedē medir los miēbros y estatura del hōbre allēde dīa q̄ haue mos dicho. Ay el alto del hōbre seys pies dos suyos. Ay quatro codos. Ay del punto de la coronilla de la cabeza hasta



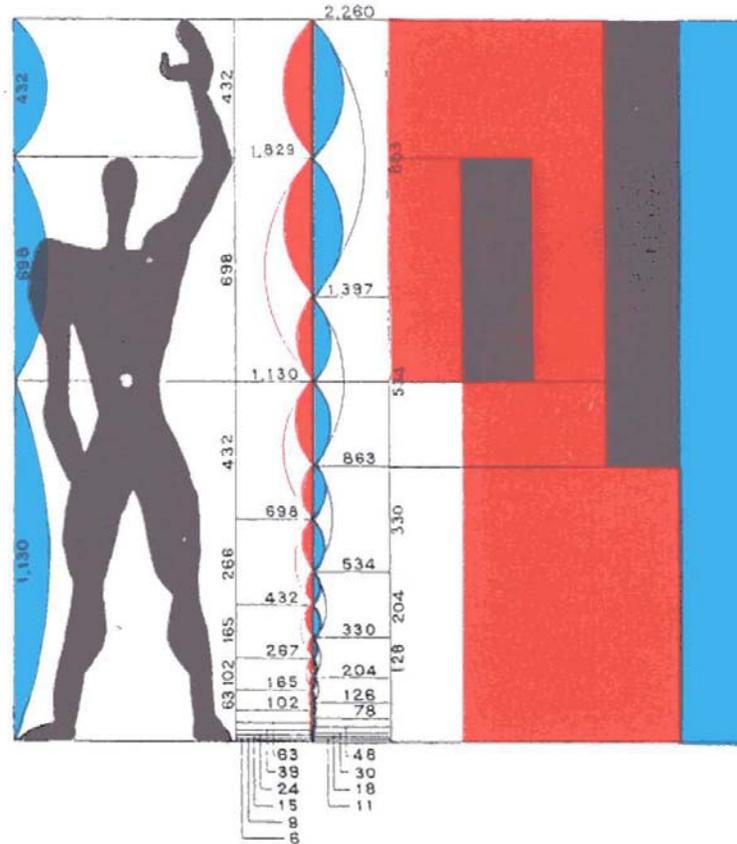
lo mas baxo de la barua la octaua parte de su estatura: de esta coronilla hasta el nacimiento de la gargāta vna quarta parte: de este mesmo lugar hasta lo mas alto de la frente vna sexta parte. ¶ Contiene otro si el ancho del hombre de costado a costado la sexta parte del alto: y del ombligo a los riñones la nouena parte: y nota que estas medidas no tienē verdad

Albrecht Dürers Erkenntnis

„Waß aber dy schonheit sey, daz weis jch nit“

ca. 1528

Le Corbusiers *Modulor*



1948 - 1955

8.

Cantors Diagonalisierungstheorem

Theorem

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis

Aus der Annahme der Abzählbarkeit wird ein Widerspruch abgeleitet. Nach der Regel der *reductio ad absurdum*

A impliziert non A

non A

folgt daraus die Behauptung.

Cantors Diagonalisierungstheorem

Vorüberlegungen

1. Wenn die Behauptung für die reellen Zahlen, die größer 0 und kleiner gleich 1 sind, bewiesen ist, dann gilt sie auch für die Menge aller reellen Zahlen.
2. Die reellen Zahlen, die größer 0 und kleiner gleich 1 sind, lassen sich eineindeutig als abzählbar unendliche nicht periodisch 0 werdende Folgen von Dezimalziffern

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ \dots$

darstellen.

Also z.B. 0,5 als 4999... und 1 als 999...

Cantors Diagonalisierungstheorem

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$.	.			
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$.				
$a_{4,1}$.	.	$a_{4,4}$				
.				.			
					.		

Annahme

Die Menge der reellen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Folgerung

Dann existiert eine in beiden Dimensionen abzählbar unendliche **Matrix**, deren Zeilen die reellen Zahlen $0 < x \leq 1$ als abzählbar unendliche nicht periodisch 0 werdende Folgen $a_{i,1} a_{i,2} a_{i,3} a_{i,4} \dots$ von Dezimalziffern darstellen. Sei **A** eine solche Matrix

Cantors Diagonalisierungstheorem

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$.	.			
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$.				
$a_{4,1}$.	.	$a_{4,4}$				
.				.			
					.		
						.	

Beobachtung

Die Diagonale der abzählbar unendlichen **Matrix A** ist eine abzählbar unendliche Folge von Dezimalziffern $a_{1,1}$ $a_{2,2}$ $a_{3,3}$ $a_{4,4}$...

Cantors Diagonalisierungstheorem

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$.	.		
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$.	.			
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$.				
$a_{4,1}$.	.	$a_{4,4}$				
.				.			
					.		
						.	

Konstruktion

Wir ersetzen die Ziffern $a_{i,i}$ der Ziffernfolge $a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} \dots$ durch ungleiche Ziffern $z_{i,i}$ derart, dass die dadurch entstehende Ziffernfolge $z_{1,1} z_{2,2} z_{3,3} z_{4,4} \dots$ nicht periodisch 0 wird.

Folgerung

Die Ziffernfolge $z_{1,1} z_{2,2} z_{3,3} z_{4,4} \dots$ repräsentiert eine reelle Zahl $0 < z \leq 1$.

Cantors Diagonalisierungstheorem

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$.	.			
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$.				
$a_{4,1}$.	.	$a_{4,4}$				
.				.			
$z_{1,1}$	$z_{2,2}$	$z_{3,3}$.	.	\neq	.	
						.	

Beobachtung

Die Ziffernfolge $z_{1,1} z_{2,2} z_{3,3} z_{4,4} \dots$ kommt in der **Matrix A** nicht vor, da sie sich in **A** von jeder Ziffernfolge $a_{x,1} a_{x,2} a_{x,3} a_{x,4} \dots$ an der Stelle der Diagonale unterscheidet.

Folgerung

Die Zahl $0 < z \leq 1$ wird in **A** nicht repräsentiert.

Cantors Diagonalisierungstheorem

Schlussfolgerungen

1. Die Tatsache, dass es eine Zahl $0 < z \leq 1$ gibt, die in der Matrix **A** nicht repräsentiert wird, steht im Widerspruch zur Wahl von **A**.
2. Es existiert keine solche **Matrix**, die alle reellen Zahlen $0 < x \leq 1$ darstellt.
3. Die Menge der reellen Zahlen $0 < x \leq 1$ ist nicht abzählbar.
4. Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

q.e.d.

Cantors Diagonalisierungstheorem

Einwände

1. Die Beweisführung ist nicht konstruktiv und macht von der doppelten Negation Gebrauch.
2. Die Matrix A ist fiktiv. Obwohl sie nicht existiert, wird sie bezeichnet und es wird ihr eine unendliche Zahlenfolge entnommen.

Gegenargumente

1. Die Beweisführung ist in klassischer Logik als korrekter Beweis formalisierbar.
2. *Die Matrix A ist ein Modell.*

Schluss

Das Modell des Modellseins

- Untersuchung wissenschaftstheoretischer Konsequenzen
- Studium des Modellseins als Kulturtechnik
- exemplarische Modellanalysen
- Entwicklung einer allgemeinen Modelltheorie
- Entwicklung heuristischer Modellierungsprinzipien
- Studium von Modellgebäuden
- Lösung offener Fragen
- Werden Modelle künftig sein, was Zahlen heute sind?

Danke