

**Robotik**

# **ROBOTER KINEMATIK**

**Forschungsbericht 1990-15**

**Günter Hommel**

**Hermann Heiß**

**Prof. Dr.-Ing. Günter Hommel**

**Fachgebiet PDV und Robotik**

**Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik**

**Technische Universität Berlin**

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>i</b>
<b>1 Einführung in die Robotermathematik</b> .....	<b>1</b>
1.1 Beschreibung von Objektstellungen.....	1
1.1.1 Sechsdimensionale Beschreibungsvektoren .....	2
1.1.2 Homogene Koordinaten und homogene $4 \times 4$ -Matrizen .....	3
1.1.3 Duale Zahlen und duale $3 \times 3$ -Matrizen .....	5
1.1.4 Duale Quaternionen .....	8
1.2 Operationen auf Stellungsbeschreibungen .....	10
1.2.1 Umrechnung sechsdimensionaler Beschreibungsvektoren in homogene $4 \times 4$ Matrizen .....	10
1.2.2 Umrechnung homogener $4 \times 4$ -Matrizen in sechsdimensionale Beschreibungsvektoren .....	12
1.2.3 Operationen auf homogenen $4 \times 4$ -Matrizen .....	16
1.2.4 Umrechnung homogener $4 \times 4$ -Matrizen in duale $3 \times 3$ -Matrizen .....	21
1.2.5 Umrechnung dualer $3 \times 3$ -Matrizen in homogene $4 \times 4$ -Matrizen .....	21
1.2.6 Operationen auf dualen $3 \times 3$ -Matrizen .....	23
1.2.7 Operationen auf dualen Quaternionen .....	27
1.2.8 Umrechnung homogener $4 \times 4$ -Matrizen in duale Quaternionen .....	29
1.2.9 Umrechnung dualer Quaternionen in homogene $4 \times 4$ -Matrizen .....	30
<b>2 Roboterkinematik</b> .....	<b>33</b>
2.1 Theorie der Vorwärtsrechnung.....	34
2.1.1 Prinzipielle Vorgehensweise.....	34
2.1.2 Beziehungen zwischen benachbarten Gelenken .....	34
2.1.3 Berechnung der Effektorstellung .....	39
2.1.4 Vereinfachungen und Sonderfälle bei der Vorwärtsrechnung.....	40
2.1.5 Optimale Null-Lagen der Robotergelenke.....	41
2.1.6 Beispiel: Berechnung der Effektorstellung.....	42
2.2 Grundlagen der Rückwärtsrechnung.....	47
2.2.1 Vereinfachungsmöglichkeiten für die Rückwärtsrechnung.....	47
2.2.2 Klassifikation von Roboterkonstruktionen und Zielvorgaben.....	48
2.2.3 Vorüberlegungen zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung .....	55
2.2.4 Auswahl nichtredundanter Bestimmungsgleichungen.....	57

2.3 Ein Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung zweiten Grades .....	60
2.3.1 Charakterisierung der Robotergelenke .....	60
2.3.2 Orientierungsbetrachtung.....	61
2.3.3 Positionswertbetrachtung.....	67
2.3.4 Abstandsbetrachtung.....	68
2.3.5 Distanzbetrachtung .....	70
2.3.6 Anwendung der Positionswertbetrachtung auf den .....	71
2.3.7 Einfluß verschiedener Ansätze auf die Lösungsstruktur am Beispiel des GdA06 .....	74
2.3.8 Zusammenstellung der explizit quadratisch lösbaren Roboterklassen .....	80
2.4 Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung mit Grad vier.....	82
2.4.1 Roboterkonstruktionen mit drei sich schneidenden Rotationsachsen .....	82
2.4.2 Roboterkonstruktionen mit 2 Zylindergelenken.....	86
2.4.3 Vergleich der Lösungen mit Grad zwei und Grad vier.....	89
2.5 Berechnung der Gelenkgeschwindigkeit.....	92
2.6 Inkrementelle Rückwärtsrechnung.....	96
2.6.1 Linearisierung der Roboterfunktion $F(v_1, \dots, v_n)$ .....	96
2.6.2 Bestimmung der Gelenkvariablen aus einem linearen Gleichungssystem .....	100
2.6.3 Vergleichende Bewertung der expliziten und der inkrementellen Rückwärtsrechnung.....	109
<b>Index .....</b>	<b>111</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>116</b>

# 1 Einführung in die Robotermathematik

## 1.1 Beschreibung von Objektstellungen

Die räumliche Stellung eines Objekts, z.B. auch des Effektors, wird durch die Definition von zwei Koordinatensystemen und die geometrischen Beziehungen zwischen beiden beschrieben:

1. Das *objektspezifische* charakterisiert das zu handhabende Objekt und wird mit diesem mitbewegt; in der Geometrie wird deshalb häufig vom *Gangsystem* gesprochen. Koordinatenursprung und Richtung der Achsen werden entsprechend der Objektgeometrie und Aufgabenstellung vom Anwender sinnvoll festgelegt und können sich z.B. am Schwerpunkt, an Symmetrieachsen oder bestimmten ausgezeichneten Objektpunkten, -kanten oder -flächen orientieren.
2. Das *Bezugskordinatensystem* beschreibt das die Objekte umgebende System; da dieses System in der Regel fest ist (zumindest hinsichtlich der Relativbewegung der ihm zugeordneten Objekte), wird es in der Geometrie auch als *Rastsystem* bezeichnet. Koordinatenursprung und Richtung der Achsen sind entsprechend der Aufgabenstellung bzw. Umwelt wählbar (in der Literatur deshalb oft auch *Weltkoordinatensystem* genannt) und können z. B. durch Fertigungseinrichtungen, Handhabungseinrichtungen oder Gebäude vorgegeben werden.

Beide Koordinatensysteme sind i.a. kartesische Rechtssysteme; in besonderen Anwendungsfällen können auch andere orthogonale Koordinatensysteme benutzt werden (z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinatensystem), deren Koordinaten aber immer in die Koordinaten eines kartesischen Hilfskoordinatensystems transformiert werden können. Wir beschränken uns deshalb im weiteren auf das am häufigsten verwendete kartesische Rechtskoordinatensystem.

Die *Orientierung* eines Objekts ist die Winkelbeziehung zwischen den Achsen des objektspezifischen Koordinatensystems und denen des Bezugskordinatensystems.

Die *Position* eines Objekts ist der Ort, den ein bestimmter Punkt des Objekts – in der Regel der Ursprung des objektspezifischen Koordinatensystems – im Bezugskordinatensystem einnimmt.

Die *Stellung* (=räumliche Stellung) eines Objekts wird durch die Position und die Orientierung im vorgegebenen Bezugskordinatensystem definiert.

Der *Freiheitsgrad*  $f$  ist die Anzahl der möglichen unabhängigen Bewegungen (Translationen, Rotationen) eines Objekts gegenüber einem Bezugskordinatensystem. Demnach hat ein im Raum frei bewegliches Objekt den Freiheitsgrad  $f=6$ , der sich – bei einem kartesischen Bezugskordinatensystem – aus drei translatorischen Bewegungsmöglichkeiten (Verschiebungen) zur Festlegung der Position und drei rotatorischen Bewegungsmöglichkeiten (Drehungen) zur Festlegung der Orientierung zusammensetzt. Der Freiheitsgrad  $f=6$  ist nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Voraussetzung, damit ein Objekt eine beliebige vorgegebene Stellung im Bezugskordinatensystem einnehmen kann.

Die Anzahl der *Bewegungsachsen* eines Roboters (*Getriebefreiheitsgrad*  $F$ ) ist nicht gleichzusetzen mit der Anzahl der Freiheitsgrade.

Beispiel: Ein Industrieroboter mit acht Achsen (drei translatorische und fünf rotatorische) besitzt trotzdem nur den Freiheitsgrad  $f=6$ ; der Vorteil der größeren Achsenzahl liegt in der erhöhten Flexibilität, die z.B. bei Montagearbeiten sinnvoll sein kann. Ein Problem ergibt sich beim Anfahren einer vorgegebenen Stellung aus der Mehrdeutigkeit der Gelenkstellungen, die eine aufgabenspezifische Festlegung notwendig macht.

Auch bei einer Achsenzahl  $F \leq 6$  kann gelten: Achsenzahl  $>$  Freiheitsgrad. Die Vor- und Nachteile einer solchen Konstellation sind die gleichen wie im obigen Beispiel; zusätzlich jedoch erlaubt eine solche Konstruktion nicht, daß der Effektor jede beliebige Stellung im Raum einnehmen kann, was bei vielen Handhabungsaufgaben ein schwerwiegender Mangel sein dürfte.

Beispiel: Eine automatische Teleskopantenne besitzt den Freiheitsgrad  $f=1$ , aber mehrere (nicht unabhängige) translatorische Bewegungsachsen.

Es gilt: Ein Roboter mit dem Freiheitsgrad  $f$  benötigt mindestens  $f$  (geeignet angeordnete) Bewegungsachsen. Falls  $f > 3$ , so sind mindestens  $f-3$  Bewegungsachsen Rotationsgelenke.

Die geometrische Beziehung zwischen dem objektspezifischen Koordinatensystem und dem Bezugskordinatensystem kann mathematisch unterschiedlich dargestellt werden. Um reelle Zahlen, Vektoren, Zen und Quaternionen auch optisch voneinander abgrenzen zu können, werden Vektoren mit kleinen Buchstaben in Fettdruck und Matrizen bzw. Quaternionen mit fettgedruckten Großbuchstaben bezeichnet.

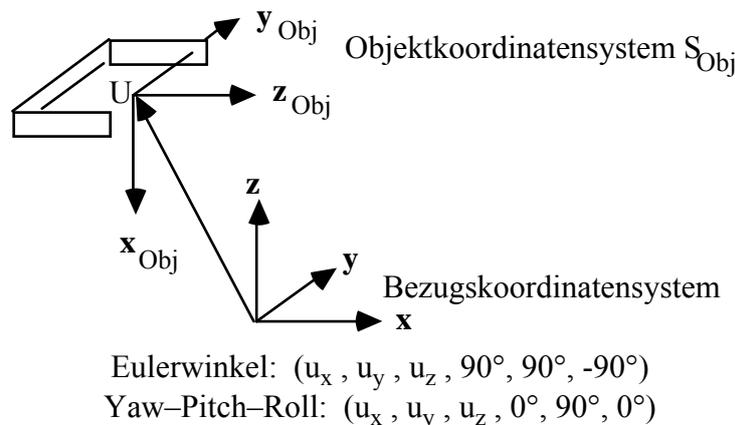
### 1.1.1 Sechsdimensionale Beschreibungsvektoren

Der sechsdimensionale  $(x,y,z,W1,W2,W3)$  gibt den Ursprung des Objektkoordinatensystems als Raumpunkt  $(x,y,z)$  im Bezugssystem und die zur Beschreibung der Objektorientierung nötigen Drehwinkel  $W1$ ,  $W2$  und  $W3$  an.

Die Winkel  $W1$ ,  $W2$  und  $W3$  können sich auf unterschiedliche Rotationsachsen beziehen. Am weitesten verbreitet sind die beiden folgenden Definitionen:

Als *Eulerwinkel* werden die Winkel dann bezeichnet, wenn  $W1$  die Drehung um die  $z$ -Achse des Bezugssystems,  $W2$  die Drehung um die durch  $W1$  *veränderte*  $x$ -Achse des Bezugssystems und der Winkel  $W3$  die Drehung um die inzwischen durch  $W2$  *veränderte*  $z$ -Achse beschreiben. Es gibt in der Literatur jedoch auch abweichende Definitionen der Eulerwinkel [Rooney 77]; häufig findet sich zum Beispiel eine Definition, in der als zweite Drehachse die *veränderte*  $y$ -Achse benutzt wird [Paul 81a].

Mit "*Yaw-Pitch-Roll*" (Gieren-Stampfen-Rollen) werden die Winkel dann bezeichnet, wenn  $W1=Yaw$  die Drehung um die  $z$ -Achse,  $W2=Pitch$  die Drehung um die  $y$ -Achse und  $W3=Roll$  die Drehung um die  $x$ -Achse darstellt, wobei die Drehachsen immer die festliegenden Achsen des Bezugssystems sind. Auch hierfür finden sich abweichende Definitionen in der Literatur, die aber alle als gleichwertig betrachtet werden können.



**Abb. 1.1:** Beschreibung der Objektstellung durch sechsdimensionale Beschreibungsvektoren

Da der Freiheitsgrad  $f=6$  gerade durch drei Translationen und drei Rotationen definiert ist, sehen wir, daß diese Art der Stellungsbeschreibung die kompakteste Form darstellt. Insofern ist sie bei der Beschreibung von Objektstellungen durch den Anwender benutzerfreundlich. Allerdings sind auf dieser mathematischen Struktur keine Operationen definiert, die eine Verknüpfung von Stellungen ermöglichen. Hierzu muß die Information des sechsdimensionalen Beschreibungsvektors in eine der nachfolgenden Darstellungsformen transformiert werden. Die Umrechnungsverfahren hierfür werden in Abschnitt 1.2 beschrieben.

### 1.1.2 Homogene Koordinaten und homogene 4×4-Matrizen

Neben dem sechsdimensionalen Beschreibungsvektor  $(x,y,z,W1,W2,W3)$ , der sich für die Objektstellungen durch den Anwender als Standard herauskristallisiert hat, haben sich die *homogenen* homogene- *Koordinaten* für die Weiterverarbeitung dieser Daten durchgesetzt. Weiterverarbeitung umfaßt vor allem die Verknüpfung relativer Beschreibungen und Modifikation vorgegebener Stellungen.

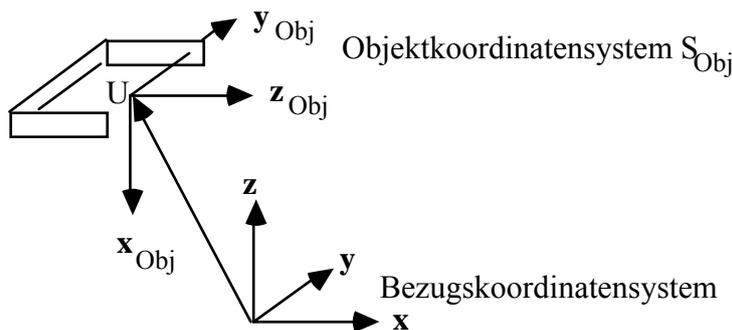
Beim Übergang zu homogenen Koordinaten wird das Tripel  $P = (x,y,z)^T$  eines Raumpunktes  $P$  zum Quadrupel  $(x,y,z,1)^T$  umgeformt. Für den Vektor  $\mathbf{v} = (x,y,z)^T$  ergeben sich die homogenen Koordinaten durch eine Erweiterung auf  $(x,y,z,0)^T$ .

Die Idee der homogenen Erweiterung stammt aus der projektiven Geometrie [Newman 79]; allerdings werden die weitergehenden Möglichkeiten, die dieser Bereich bietet, in der Roboterkinematik nicht benötigt und daher auch nicht übernommen. Die Strukturweiterung durch 1 und 0 dient oberflächlich betrachtet lediglich der Vereinfachung des Aufschreibungsaufwandes.

Ein Beispiel für diese vereinfachende Anwendungsweise der homogenen Struktur findet sich im Abschnitt 1.2 . Ebenso wird dort noch etwas näher auf die Herleitung dieser homogenen Struktur eingegangen und gezeigt, daß zum Erhalt der Eigenschaft eines freien Vektors die Unterscheidung zwischen der 1-Erweiterung bei Raumpunkten und der 0-Erweiterung bei Vektoren zwingend notwendig ist.

Zum Nachweis, daß die oben definierte Erweiterung zum homogenen Punktraum mit dem bisher bekannten dreidimensionalen Punktraum äquivalent ist, wird auf Lehrbücher der projektiven Geometrie (z.B. [Penna 86]) bzw. auf [Heiß 85] verwiesen.

Die Stellung eines Objekts läßt sich nun beschreiben durch die Angabe der Koordinaten der  $\mathbf{x}$ -,  $\mathbf{y}$ - und  $\mathbf{z}$ -Einheitsvektoren und der Position des Ursprungs des Objektkoordinatensystems. Die Beschreibung erfolgt jeweils bezüglich des Bezugskoordinatensystems. Werden diese drei Vektoren und die Punktkoordinaten spaltenweise zu einer 3×4-Matrix zusammengefaßt und durch eine vierte Zeile  $(0,0,0,1)$  zu einer 4×4-Matrix erweitert, so entsteht die *homogene- 4×4-Matrix* zur Beschreibung der Objektstellung.



$$(\mathbf{x}_{\text{Obj}}, \mathbf{y}_{\text{Obj}}, \mathbf{z}_{\text{Obj}}, U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ -1 & 0 & 0 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Abb. 1.2:** Darstellung des Objektkoordinatensystems  $S_{\text{Obj}}$  durch eine homogene  $4 \times 4$ -Matrix

Abb. 1.2 legt es nahe, die einzelnen Spalten der homogenen  $4 \times 4$ -Matrix als homogene  $\mathbf{x}$ -,  $\mathbf{y}$ -,  $\mathbf{z}$ -Einheitsvektoren und als homogene Punktbeschreibung zu interpretieren. Die einfache Form der vierten Zeile der homogenen  $4 \times 4$ -Matrix liegt jedoch darin begründet, daß in der Roboterkinematik keine Skalierungsoperatoren und perspektivische Transformationen vorkommen. Detailliertere Darstellungen der homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen finden sich in Lehrbüchern der projektiven Geometrie oder z.B. in [Giloj 78].

Wie bereits oben gezeigt wurde, sind zur Darstellung beliebiger Stellungen im Raum sechs Kenngrößen ausreichend. Ein Vergleich der in Zeile 1 mit Zeile 3 der homogenen  $4 \times 4$ -Matrix enthaltenen zwölf nichttrivialen Kenngrößen hiermit zeigt, daß bei dieser Darstellungsart sechs Kenngrößen redundant sind. Diese Redundanz resultiert aus der Orthonormalitätsbedingung, der die drei Vektoren  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  des kartesischen Rechtskoordinatensystems unterworfen sind.

In einigen Darstellungen wird eine homogene  $4 \times 4$ -Matrix als *Frame* bezeichnet. Wir vermeiden hier diesen Begriff nach Möglichkeit, weil er im Bereich der Wissensrepräsentation und der Planung in der Robotik mit vollständig anderer Bedeutung ebenfalls benutzt wird.

### 1.1.3 Duale Zahlen und duale $3 \times 3$ -Matrizen

Die Benutzung dualer Zahlen wird in manchen Literaturstellen als der wesentliche Fortschritt in der Roboterkinematik bezeichnet [Yang 74, Lara-Feria 86]. Diese Einschätzung erscheint uns etwas zu euphorisch, denn sämtliche Ergebnisse aus der Anwendung dieses Prinzips können ebenso durch den Einsatz homogener  $4 \times 4$ -Matrizen erhalten werden. Auch im Hinblick auf den Rechenaufwand ist das Verfahren mit

homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen nur in wenigen Sonderfällen schlechter. Dennoch treten die dualen Zahlen in der Robotikliteratur so häufig auf, daß wir sie in dieser Einführung nicht unbehandelt lassen wollen, nicht zuletzt, um dem Leser eine Möglichkeit zur eigenen Beurteilung zu geben.

Duale- Zahlen sind von der Form  $d = dp + \varepsilon \cdot ds$ , wobei  $dp, ds \in \mathfrak{R}$  und  $\varepsilon^2 = 0$  gilt und  $dp$  als und  $ds$  als bezeichnet wird. und Multiplikation zweier dualer Zahlen lassen sich analog zu den komplexen Zahlen aus den Verknüpfungsregeln des Körpers  $\mathfrak{R}$  der reellen Zahlen ableiten:

Seien  $d_1 = dp_1 + \varepsilon \cdot ds_1$  und  $d_2 = dp_2 + \varepsilon \cdot ds_2$  zwei duale Zahlen, dann gilt:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= dp_1 + dp_2 + \varepsilon \cdot (ds_1 + ds_2) \\ d_1 \cdot d_2 &= dp_1 \cdot dp_2 + \varepsilon \cdot (dp_1 \cdot ds_2 + ds_1 \cdot dp_2) \end{aligned}$$

Durch die spezielle Definition  $\varepsilon^2 = 0$  behalten viele Gesetzmäßigkeiten, die für reelle Zahlen gelten, ihre Gültigkeit auch für duale Zahlen. Dies gilt besonders für alle trigonometrischen Sätze, wie z.B.  $\sin^2(d) + \cos^2(d) = 1$ .

Reelle Funktionen lassen sich nämlich sehr einfach auf duale Zahlen erweitern. Eine Funktion mit dualer Variablen wird über ihre Taylorreihe definiert [Rooney 75] und die Eigenschaft, daß  $\varepsilon^2 = 0$  ist, ergibt dann:

$$f(dp + \varepsilon \cdot ds) = f(dp) + \varepsilon \cdot ds \cdot f'(dp) + \underbrace{\varepsilon^2 \cdot ds^2 / 2! \cdot f''(dp) + \dots}_{= 0}$$

Speziell für die häufig benötigten Funktionen Sinus und Cosinus gilt [Yang 74]:

$$\begin{aligned} \sin(dp + \varepsilon \cdot ds) &= \sin(dp) + \varepsilon \cdot ds \cdot \cos(dp) \\ \cos(dp + \varepsilon \cdot ds) &= \cos(dp) - \varepsilon \cdot ds \cdot \sin(dp) \end{aligned}$$

Einerseits kann durch eine Dualzahl sowohl die Drehung  $dp$  um eine Achse als auch die Schiebung  $ds$  entlang dieser Achse dargestellt werden.

Andererseits können drei Dualzahlen zu einem dualen dualen -r Vektor  $(d_1, d_2, d_3)^T$  zusammengefaßt werden, so daß damit die und die Position einer Geraden im Raum beschrieben werden kann. Die Primärteile  $(dp_1, dp_2, dp_3)^T$  definieren hierbei den normierten Einheitsorientierungsvektor  $\mathbf{o}$  der Geraden. Mit den Sekundärteilen  $(ds_1, ds_2, ds_3)^T$  könnte der Lotvektor vom Nullpunkt des Bezugssystems zur Geraden dargestellt werden. Statt des Lotvektors wird jedoch das Kreuzprodukt aus Lotvektor und Orientierungsvektor der Geraden im Sekundärteil angegeben. Dies sind die sogenannten der Geraden. Da jeder Punkt der Geraden zur Berechnung herangezogen werden kann, führt diese Definition einerseits zu einer rechentechnischen Vereinfachung der Datenstruktur, andererseits entspricht diese Größe dem aus der Mechanik bekannten Begriff des Moments. Da mit Hilfe des Kreuzprodukts aus Orientierungsvektor und Momentenvektor der Lotvektor gewonnen werden kann, stellt die Verwendung des Momentenvektors keine Einschränkung dar. Weitere Vorteile der Benutzung dieser Darstellung werden in Abschnitt. 1.2.4, 2.1.2 und 2.4.2 sichtbar.

Veranschaulichung der Berechnung des Momentenvektors  $\mathbf{m}$ : Sei  $\mathbf{l}$  der Lotvektor und  $\mathbf{o}$  der Orientierungsvektor einer Geraden mit  $|\mathbf{o}|=1$ , A ein beliebiger Punkt auf der Geraden und  $\mathbf{a}$  der zugehörige Vektor vom Nullpunkt des Bezugssystems.

Der Vektor  $\mathbf{a}$  läßt sich zerlegen in  $\mathbf{a} = \mathbf{l} + \lambda \cdot \mathbf{o}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

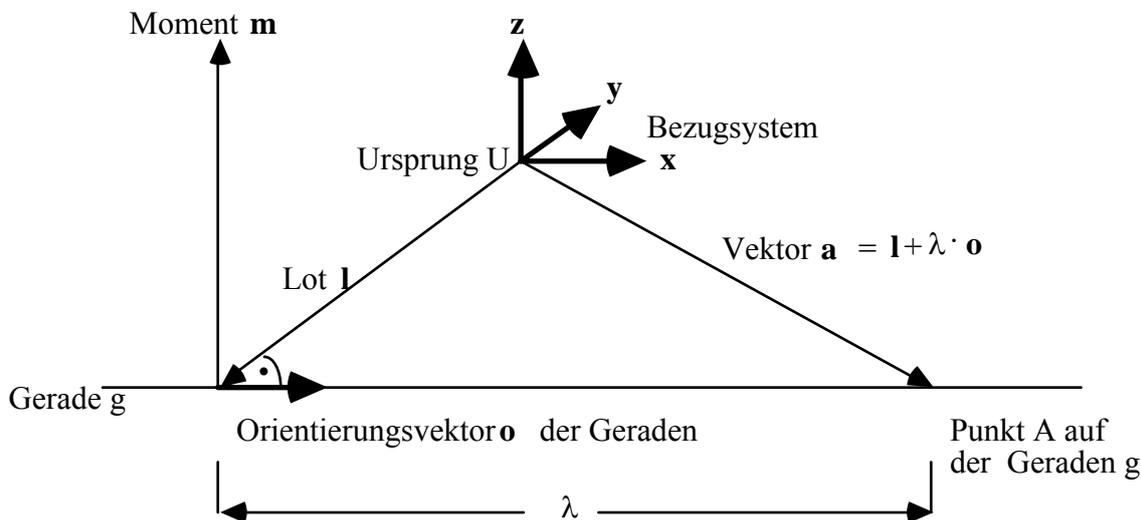


Abb. 1.3: Lot- und Momentenvektor einer Geraden

Es gilt:  $\mathbf{m} = \mathbf{l} \times \mathbf{o} = (\mathbf{l} + \lambda \cdot \mathbf{o}) \times \mathbf{o} = \mathbf{a} \times \mathbf{o}$   
 $|\mathbf{m}| = |\mathbf{l} \times \mathbf{o}| = |\mathbf{l}| \cdot |\mathbf{o}| \cdot \sin(90^\circ) = |\mathbf{l}|$   
 $\mathbf{l} = \mathbf{o} \times \mathbf{m}$

Beispiel für die Berechnung der Plückerkoordinaten der  $\mathbf{x}_{\text{Obj}}$ -Achse in Abb. 1.4:

$$\mathbf{x}_{\text{Obj}} = (d_1, d_2, d_3)^T = (dp_1 + \varepsilon \cdot ds_1, dp_2 + \varepsilon \cdot ds_2, dp_3 + \varepsilon \cdot ds_3)^T$$

$$\mathbf{o}_{\text{Obj}} = (dp_1, dp_2, dp_3)^T = (0, 0, -1)^T$$

$$\mathbf{a}_{\text{Obj}} = (u_x, u_y, u_z)^T \quad \{ \text{Ursprung ist Punkt auf der Geraden} \}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_{\text{Obj}} \times \mathbf{o}_{\text{Obj}} = (-u_y, u_x, 0)^T$$

$$\mathbf{x}_{\text{Obj}} = (0 - \varepsilon \cdot u_y, 0 + \varepsilon \cdot u_x, -1)^T$$

Die vollständige Stellungsbeschreibung für dieses Beispiel ist der Abb. 1.4 zu entnehmen.

Eine umfassende Motivation für den Einsatz von dualen Zahlen liefert das "Übertragungsprinzip" [Rooney 75]:

Alle Sätze und Formeln, die sich auf sphärische Sachverhalte (reelle Winkel und Ursprungsgeraden) beziehen, sind ebenso gültig, wenn man sie auf entsprechende räumliche Sachverhalte (duale Winkel und Raumgeraden) anwendet; man muß nur jeden reellen Winkel  $\alpha$  in der ursprünglichen (sphärischen) Formel durch den entsprechenden dualen Winkel  $\alpha_{\text{dual}} = \alpha + \varepsilon \cdot a$  ersetzen [Glavina 85].

Mit der Verwendung von dualen Vektoren wurde der Übergang von der Raumpunktgeometrie zur Liniengeometrie vollzogen. Mit einem dualen Vektor können nur noch gerichtete Geraden im Raum, aber keine Punkte und freie Vektoren mehr dargestellt werden. Um Punkte und freie Vektoren darstellen zu können, muß auf den Schnittpunkt

zweier Geraden bzw. auf die isolierte Betrachtung des Primärteils der Geraden zurückgegriffen werden.

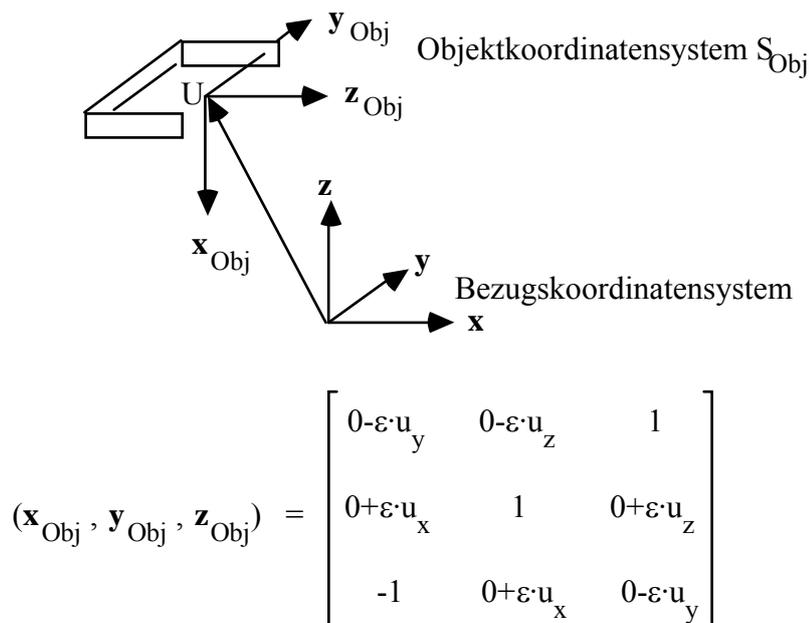
Unter Verwendung von Dualvektoren können die durch die Einheitsvektoren des Objektkoordinatensystems definierten Geraden beschrieben und zu einer dualenduale -  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{D} = \mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$  zusammengefaßt werden; je nach Anwendungsfall wird  $\mathbf{D}$  als  $3 \times 3$ -Matrix dualer Zahlen oder als Paar zweier reeller  $3 \times 3$ -Matrizen  $\mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$ , dem Primärteil  $\mathbf{Dp}$  von  $\mathbf{D}$  und dem Sekundärteil  $\mathbf{Ds}$  von  $\mathbf{D}$ , dargestellt. Der Ursprung des Objektkoordinatensystems ist implizit als Schnittpunkt der drei gerichteten Geraden in x-, y- und z-Richtung definiert.

Die und von dualen  $3 \times 3$ -Matrizen sind durch die Regeln des Körpers  $\mathfrak{R}$  und die Definition  $\varepsilon^2=0$  bestimmt:

$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = \mathbf{Dp}_1 + \mathbf{Dp}_2 + \varepsilon \cdot (\mathbf{Ds}_1 + \mathbf{Ds}_2)$$

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{Dp}_1 \cdot \mathbf{Dp}_2 + \varepsilon \cdot (\mathbf{Dp}_1 \cdot \mathbf{Ds}_2 + \mathbf{Ds}_1 \cdot \mathbf{Dp}_2)$$

Da die duale  $3 \times 3$ -Matrix 18 nichttriviale Kenndaten enthält, weist diese Darstellungsform im Vergleich zur homogenen  $4 \times 4$ -Matrix eine höhere Redundanz auf. Auch die Streichung der bei der homogenen  $4 \times 4$ -Matrix explizit vorhandenen Positionsspalte erweist sich i.a. nicht als Vorteil, da die Positionsinformation über alle drei verbleibenden Vektoren verteilt ist. Ebenso werden die Einsparungen, die sich bei einer  $3 \times 3$ -Matrixmultiplikation im Vergleich zur  $4 \times 4$ -Matrix ergeben, durch die notwendig werdende Aufspaltung in Primär- und Sekundärteil wieder aufgehoben. Nur für Berechnungen ganz spezieller Roboterkonstruktionen (zwei Rotationsgelenke, zwei Zylindergelenke) ist der Ansatz mit dualen  $3 \times 3$ -Matrizen in etwa gleichwertig mit der Verwendung homogener  $4 \times 4$ -Matrizen (vgl. Abschnitt 2.4.2).



**Abb. 1.4:** Darstellung des Objektkoordinatensystems  $S_{\text{Obj}}$  durch eine duale  $3 \times 3$ -Matrix

### 1.1.4 Duale Quaternionen

Eine *reelle* besteht aus vier reellen Werten:  $\mathbf{Q} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ ,  $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$ . Diese vier Werte beschreiben im Prinzip einen Drehwinkel und die zugehörige Drehachse durch einen dreidimensionalen Vektor. Damit können durch eine Quaternion alle Drehungen dargestellt werden, bei denen die Drehachse durch den Ursprung des Bezugssystems geht. Reelle Quaternionen eignen sich somit zwar für die Orientierungsdarstellung eines Objekts, nicht jedoch für die Wiedergabe der räumlichen Stellung, da hiermit keine Verschiebung ausgedrückt werden kann.

Laut Chasles-Theorem, kurz zusammengefaßt in [Ball 1876], ist der Übergang vom Bezugskoordinatensystem zum Objektkoordinatensystem immer durch eine Drehung und eine Schiebung bezüglich *einer* geeignet gewählten Achse erreichbar; die Darstellung dieses Übergangs ist aber identisch mit der Stellungsbeschreibung eines Objekts.

Um neben der rotatorischen Bewegung auch die benötigte Translation in einer Quaternion ausdrücken zu können, werden die vier reellen Werte durch vier Dualzahlen ersetzt und eine *duale - Quaternion*  $\mathbf{DQ} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ ,  $d_i = dp_i + \varepsilon \cdot ds_i$ , definiert.

Wie im vorigen Abschnitt schon erläutert, können durch eine Dualzahl der Winkelwert und die Verschiebungsgröße und durch die restlichen 3 Dualzahlen eine beliebige, gerichtete Gerade im Raum angegeben werden, bezüglich der die Rotation und Translation erfolgen. Damit eignen sich Dualquaternionen zur Stellungsbeschreibung eines Objekts und zeichnen sich mit ihren 8 Kenndaten durch eine sehr geringe Redundanz aus. Gleichzeitig sind Dualquaternionen im Gegensatz zum sechsdimensionalen Beschreibungsvektor auch für die Verknüpfung von Stellungen geeignet. Allerdings hebt die Komplexität der Verarbeitungsvorschrift (z.B. für die Multiplikation, vgl. Abschnitt 1.2.7) und die Schwierigkeit für den Anwender, eine Stellung durch Angabe einer Dualquaternion zu beschreiben, den Vorteil der geringen Redundanz wieder auf und läßt die homogene 4×4-Matrix für die Roboterkinematik als vorteilhafter erscheinen.

Ein Beispiel für eine Stellungsbeschreibung mit einer dualen Quaternion verschieben wir auf Abschnitt 1.2.9.

## 1.2 Operationen auf Stellungsbeschreibungen

Häufig wird die Stellung eines Objekts nicht in Bezug auf das Basiskoordinatensystem (Weltkoordinatensystem) beschrieben, sondern bezüglich eines geeigneteren Koordinatensystems. Für viele Aufgaben ist es dann notwendig, solche relativen in eine Stellungsangabe absolute, d.h. auf das Basiskoordinatensystem bezogene Stellung umzurechnen.

So ist es beispielsweise sinnvoll, die unveränderliche Stellung eines Bohrlochs in einem Werkstück relativ zu einem Werkstückkoordinatensystem zu beschreiben. Liegen nun mehrere dieser Werkstücke auf einer Palette, so kann deren Lage wieder relativ zu einem Palettenkoordinatensystem angegeben werden. Die Stellung des Palettenkoordinatensystems wird bezüglich des Basiskoordinatensystems beschrieben (vgl. Abb. 1.5). Diese Art der Stellungsangabe hat den Vorteil, daß auch bei einer Bewegung der Palette die (anderen) relativen Stellungsbeschreibungen unverändert bleiben.

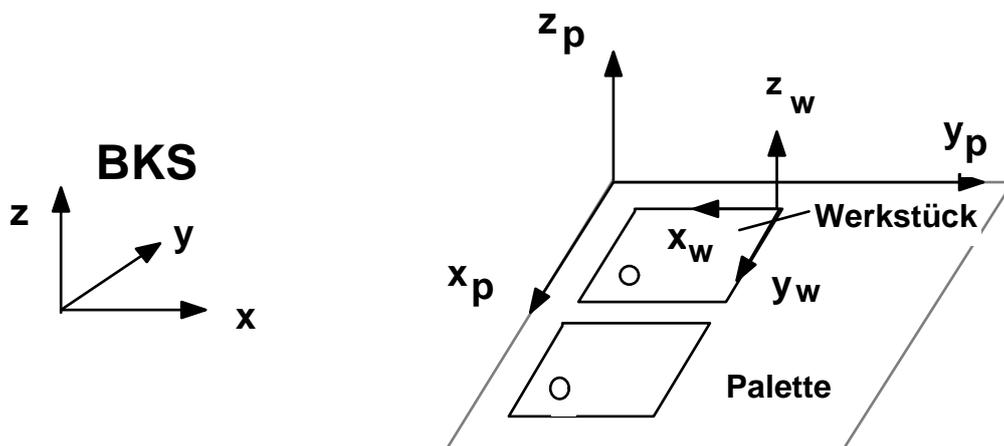


Abb. 1.5: Unterschiedliche Bezugssysteme zur relativen Stellungsangabe

Die Aufgabe besteht nun darin, z.B. die Stellung des Bohrlochs im zweiten Werkstück auf der Palette bezüglich des Basiskoordinatensystems aus den vorgegebenen relativen Stellungsbeschreibungen zu berechnen. Ein weiteres Problem, das in diesem Kapitel behandelt wird, ist die Umrechnung der verschiedenen Darstellungsformen von Stellungsbeschreibungen.

### 1.2.1 Umrechnung sechsdimensionaler Beschreibungsvektoren in homogene $4 \times 4$ Matrizen

Der sechsdimensionale Beschreibungsvektor ist nicht für die Verknüpfung von relativen Stellungsangaben geeignet. Diese Beschreibungsform muß daher zum Beispiel in eine homogene  $4 \times 4$ -Matrix umgewandelt werden. Zu diesem Zweck wird auf die aus der Geometrie bekannte Matrixform zur Darstellung von Drehungen zurückgegriffen; der

Drehwinkel wird dabei mit  $\alpha$  bezeichnet und die Verwendung der entsprechenden Achse des zugrundeliegenden Bezugssystems als Drehachse durch  $\mathbf{R}_x$  bzw.  $\mathbf{R}_y$  bzw.  $\mathbf{R}_z$  gekennzeichnet.

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jede dieser zen stellt eine Drehung des Bezugskoordinatensystems in ein (fiktives) Objektkoordinatensystem und damit gleichzeitig eine Stellungsbeschreibung dar. Werden diese Rotationsmatrizen nun miteinander multipliziert, so ergibt sich dadurch eine Verknüpfung der einzelnen relativen Drehungen zu einer Gesamtdrehung bzw. Endstellung.

Wesentlich ist dabei, daß die richtige Multiplikationsreihenfolge der zen beachtet wird. Bei einer Interpretation der Multiplikation von links nach rechts bezieht sich die Drehung der jeweiligen Matrix immer auf das durch die linksstehende Matrix definierte Koordinatensystem; für die links außen stehende Rotationsmatrix ist dies das Basiskoordinatensystem, für alle anderen Matrizen die bis dahin durch die linksstehenden Matrizen erzeugte Gesamtstellung des fiktiven, aus dem Basiskoordinatensystem hervorgegangenen Koordinatensystems.

Wird dagegen die Multiplikation der Rotationsmatrizen von rechts nach links interpretiert, so bezieht sich jede Drehung auf die unveränderlichen Achsen des Basiskoordinatensystems. Dies zeigt, daß durchaus auch die unveränderlichen Achsen des Basiskoordinatensystems als Drehachsen der Orientierungswinkel  $W_1$ ,  $W_2$  und  $W_3$  verwendet werden können.

Als Beispiel hierfür betrachten wir nochmal die in Abschnitt 1.1.1 eingeführten Definitionen der Eulerwinkel und der durch Yaw–Pitch–Roll beschriebenen Winkel.

Bei der Definition der Eulerwinkel legten wir als Drehachsen für  $W_1$ ,  $W_2$  und  $W_3$  die z-Achse, die veränderte x-Achse und wiederum die veränderte z-Achse fest, so daß die Gesamtdrehung des Koordinatensystems beschrieben wird durch das Produkt

$$\mathbf{RS} = \mathbf{R}_z(W_1) \cdot \mathbf{R}_x(W_2) \cdot \mathbf{R}_z(W_3).$$

Im Beispiel aus Abb. 1.1 ergibt dies

$$\mathbf{RS} = \mathbf{R}_z(90^\circ) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{R}_z(-90^\circ) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bei der Definition der Winkel Yaw–Pitch–Roll legen wir als Drehachsen für W1, W2 und W3 die Achsen des Bezugskoordinatensystems fest in der Reihenfolge z-Achse, y-Achse und dann x-Achse. Die Gesamtdrehung wird damit beschrieben durch das Produkt

$$\mathbf{RS} = \mathbf{Rx}(W3) \cdot \mathbf{Ry}(W2) \cdot \mathbf{Rz}(W1).$$

Im Beispiel aus Abb. 1.1 ergibt dies

$$\mathbf{RS} = \mathbf{Rx}(0^\circ) \cdot \mathbf{Ry}(90^\circ) \cdot \mathbf{Rz}(0^\circ) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Werden nun die in den Spalten eins bis drei von  $\mathbf{RS}$  enthaltenen x-, y- und z-Vektoren und die im sechsdimensionalen Vektor direkt enthaltenen Positionsangaben x, y, z zu einer 3×4-Matrix zusammengefaßt und durch eine vierte Zeile (0,0,0,1) zu einer homogenen 4×4-Matrix erweitert, so ergibt sich die dem sechsdimensionalen Vektor entsprechende Stellungsbeschreibung  $\mathbf{S}$  in homogenen Koordinaten.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \text{Orientierungsteil} \\ \mathbf{RS} \end{matrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.2.2 Umrechnung homogener 4×4-Matrizen in sechsdimensionale Beschreibungsvektoren

Umgekehrt kann natürlich auch eine Stellungsbeschreibung in Form einer homogenen 4×4-Matrix in einen sechsdimensionalen Beschreibungsvektor umgewandelt werden. Die Positionsangabe in den Matrixelementen  $S_{14}$ ,  $S_{24}$  und  $S_{34}$  wird dabei direkt als x-, y-, und z-Wert in den sechsdimensionalen Vektor übernommen. Zur Berechnung der Winkelwerte W1, W2 und W3 wird der 3×3-Orientierungsteil  $\mathbf{RS}$  der homogenen Matrix mit dem der Drehachsensdefinition entsprechenden Produkt von Rotationsmatrizen gleichgesetzt.

Für die Euler-Winkel  $\mathbf{Rz}(W1) \cdot \mathbf{Rx}(W2) \cdot \mathbf{Rz}(W3)$  führt dies z.B. zu folgender elementweise aufgeschriebenen (Matrix)-Gleichung:

- 1.1:  $RS_{11} = \cos(W1) \cdot \cos(W3) - \sin(W1) \cdot \cos(W2) \cdot \sin(W3)$
- 1.2:  $RS_{12} = -\cos(W1) \cdot \sin(W3) - \sin(W1) \cdot \cos(W2) \cdot \cos(W3)$
- 1.3:  $RS_{13} = \sin(W1) \cdot \sin(W2)$
- 2.1:  $RS_{21} = \sin(W1) \cdot \cos(W3) + \cos(W1) \cdot \cos(W2) \cdot \sin(W3)$
- 2.2:  $RS_{22} = -\sin(W1) \cdot \sin(W3) + \cos(W1) \cdot \cos(W2) \cdot \cos(W3)$

$$\begin{aligned}
2.3: & \quad RS_{23} = -\cos(W1) \cdot \sin(W2) \\
3.1: & \quad RS_{31} = \sin(W2) \cdot \sin(W3) \\
3.2: & \quad RS_{32} = \sin(W2) \cdot \cos(W3) \\
3.3: & \quad RS_{33} = \cos(W2)
\end{aligned}$$

Um die Auflösung dieser Matrixgleichung nach den Winkeln  $W1$ ,  $W2$  und  $W3$  zu vereinfachen, wird die erste oder die dritte Rotationsmatrix (Randmatrizen) auf die andere Gleichungsseite gebracht. Dies erfolgt durch Multiplikation beider Gleichungsseiten mit der entsprechenden invertierten Randmatrix. Da die Rotationsmatrizen  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  und  $\mathbf{R}_z$  orthonormal sind, ist die Inverse einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  bekannterweise gerade ihre Transponierte:  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

Die so entstandene Matrixgleichung enthält immer genau eine Gleichung der Form

$$0 = a \cdot \sin(W_i) - b \cdot \cos(W_i), \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

aus der  $W_i$  berechnet werden kann:

$$\tan(W_i) = \sin(W_i)/\cos(W_i) = b/a \quad \Rightarrow \quad W_i = \arctan(b/a)$$

Da die arctan-Funktion mehrdeutig ist und der Hauptwert der Funktion nur Werte aus dem Intervall  $[-\pi/2, \pi/2[$  liefert, wird in der Robotik eine Funktion ATAN2 benutzt, die Werte aus dem Intervall  $[-\pi/2, 3 \cdot \pi/2[$  liefert. Zur eindeutigen Definition dieser Funktion werden Fallunterscheidungen verwendet, in denen getrennt Zähler  $Z$  und Nenner  $N$  als Argumente der Funktion verfügbar sein müssen:

$$\text{ATAN2}(Z, N) = \begin{cases} \arctan(Z/N) & \text{falls } N > 0 \\ \checkmark/2 & \text{falls } N = 0 \text{ und } Z > 0 \\ \text{beliebig} & \text{falls } N = 0 \text{ und } Z = 0 \\ -\checkmark/2 & \text{falls } N = 0 \text{ und } Z < 0 \\ \arctan(Z/N) + \checkmark & \text{falls } N < 0 \end{cases}$$

Bei der Implementierung dieser Funktion muß wie üblich darauf geachtet werden, daß wegen der endlichen Genauigkeit der Gleitpunktarithmetik die Abfragen auf Null ersetzt werden durch Abfragen auf eine rechnerabhängige untere Schranke.

Benutzen wir diese erweiterte ATAN2-Funktion, so erhalten wir zwei Lösungen für den zu berechnenden Winkel  $W_i$ :

$$W_{i1} = \text{ATAN2}(b, a) \quad \text{und} \quad W_{i2} = \text{ATAN2}(-b, -a)$$

Diese beiden Lösungen unterscheiden sich gerade um  $\pi$ .

Mit der Bestimmung von einem  $W_i$  ist eine Unbekannte der Matrixgleichung bekannt und aus den ebenfalls existierenden Gleichungen  $\sin(W_j) = \dots$  und  $\cos(W_j) = \dots$  lassen sich die zwei noch unbekannt Winkel  $W_j$  mit Hilfe von  $\text{ATAN2}(\sin(W_j), \cos(W_j)) = W_j$  in Abhängigkeit von  $W_i$  berechnen.

Am Beispiel der Euler-Winkel soll diese Vorgehensweise verdeutlicht werden. Durch Invertierung der ersten Rotationsmatrix erhalten wir die Matrixgleichung

$$\mathbf{Rz}(W1)^{-1} \cdot \mathbf{RS} = \mathbf{Rx}(W2) \cdot \mathbf{Rz}(W3).$$

Elementweise ausgeschrieben ergeben sich folgende Einzelgleichungen:

$$\begin{aligned} 1.1: & \quad RS_{11} \cdot \cos(W1) + RS_{21} \cdot \sin(W1) = \cos(W3) \\ 1.2: & \quad RS_{12} \cdot \cos(W1) + RS_{22} \cdot \sin(W1) = -\sin(W3) \\ 1.3: & \quad RS_{13} \cdot \cos(W1) + RS_{23} \cdot \sin(W1) = 0 \\ 2.1: & \quad -RS_{11} \cdot \sin(W1) + RS_{21} \cdot \cos(W1) = \cos(W2) \cdot \sin(W3) \\ 2.2: & \quad -RS_{12} \cdot \sin(W1) + RS_{22} \cdot \cos(W1) = \cos(W2) \cdot \cos(W3) \\ 2.3: & \quad -RS_{13} \cdot \sin(W1) + RS_{23} \cdot \cos(W1) = -\sin(W2) \\ 3.1: & \quad RS_{31} = \sin(W2) \cdot \sin(W3) \\ 3.2: & \quad RS_{32} = \sin(W2) \cdot \cos(W3) \\ 3.3: & \quad RS_{33} = \cos(W2) \end{aligned}$$

Die Gleichung 1.3 erlaubt die Berechnung von W1:

$$\begin{aligned} \sin(W1)/\cos(W1) &= -RS_{13}/RS_{23} \quad \text{oder} \quad \sin(W1)/\cos(W1) = RS_{13}/(-RS_{23}) \\ \Rightarrow W1_1 &= \text{ATAN2}(-RS_{13}, RS_{23}) \quad \text{bzw.} \quad W1_2 = \text{ATAN2}(RS_{13}, -RS_{23}) \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 2.3 und 3.3 kann dann der Winkel W2 und aus den Gleichungen 1.1 und 1.2 der Winkel W3 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} W2 &= \text{ATAN2}(RS_{13} \cdot \sin(W1) - RS_{23} \cdot \cos(W1), RS_{33}) \\ W3 &= \text{ATAN2}(-RS_{12} \cdot \cos(W1) - RS_{22} \cdot \sin(W1), RS_{11} \cdot \cos(W1) + RS_{21} \cdot \sin(W1)) \end{aligned}$$

Betrachten wir zum Schluß am Beispiel von W1 den Sonderfall  $RS_{13}=RS_{23}=0$ , für den  $\text{ATAN2}(RS_{13}, RS_{23}) = \text{ATAN2}(0,0)$  nicht definiert ist. In diesem Fall ist W1 beliebig wählbar, die Gleichung 1.3 bleibt mit "0=0" immer korrekt erfüllt. Wegen der Orthonormalität folgt aus  $RS_{13}=RS_{23}=0$  sofort  $RS_{33}=\pm 1$ ,  $RS_{31}=RS_{32}=0$ ,  $RS_{11}=\pm RS_{22}$ ,  $RS_{21}=\mp RS_{12}$ . Die Rotationsmatrix  $\mathbf{RS}$  hat also folgende Form:

$$\mathbf{RS} = \begin{bmatrix} \pm RS_{22} & RS_{12} & 0 \\ \mp RS_{12} & RS_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Dies bedeutet geometrisch, daß die z-Richtungen des Bezugs- und des Objektkoordinatensystems, eventuell bis auf das Vorzeichen, übereinstimmen. Diese Orientierung kann nur erreicht werden, wenn bei der zweiten Drehung um die veränderte x-Achse entweder  $W2=0^\circ$  oder  $W2=180^\circ$  ist. Diese Werte ergeben sich auch genau aus der Formel für W2. In diesem Fall kann dann bei der dritten Drehung um die z-Achse die erste Drehung um

W1 vollständig rückgängig gemacht werden. Es ist offensichtlich gleichgültig, wie groß W1 gewählt wurde, da mit W3 dann dieser Winkelbetrag ausgeglichen werden kann.

Aufgrund der Orthonormalität von **RS** läßt sich sehr einfach zeigen, daß der Sonderfall ATAN2(0,0) bei der Berechnung von W2 und W3 nicht auftreten kann.

Angenommen, die Gleichung 1.3 " $RS_{13} \cdot \cos(W1) + RS_{23} \cdot \sin(W1) = 0$ " sei korrekt erfüllt und  $W2 = \text{ATAN2}(0,0)$ , d.h.  $RS_{13} \cdot \sin(W1) - RS_{23} \cdot \cos(W1) = 0$  und  $RS_{33} = 0$ ; dann folgt:  $(RS_{13} \cdot \cos(W1) + RS_{23} \cdot \sin(W1))^2 + (RS_{13} \cdot \sin(W1) - RS_{23} \cdot \cos(W1))^2 + RS_{33}^2 = 0$  und dies führt zum Widerspruch  $RS_{13}^2 + RS_{23}^2 + RS_{33}^2 = 0$  !

Anhand dieses noch sehr überschaubaren Beispiels soll durch die Erläuterung einer zweiten Variante zur Berechnung der  $W_i$  verdeutlicht werden, wie stark die Auswahl geeigneter Bestimmungsgleichungen die Handhabbarkeit und Fehlersicherheit der Berechnung beeinflusst.

Wären wir von der ursprünglichen Matrixgleichung ausgegangen, so wäre die Einzelgleichung 3.3

$$RS_{33} = \cos(W2)$$

die einzige Gleichung, in der nur eine Unbekannte vorkommt. Wir könnten also mit der Beziehung

$$\sin(W2) = \pm \sqrt{1 - RS_{33}^2}$$

W2 berechnen:

$$W2 = \text{ATAN2}(\pm \sqrt{1 - RS_{33}^2}, RS_{33})$$

Aus 1.3 und 2.3:  $W1 = \text{ATAN2}(RS_{13}/\sin(W2), -RS_{23}/\sin(W2))$

Aus 3.1 und 3.2:  $W3 = \text{ATAN2}(RS_{31}/\sin(W2), RS_{32}/\sin(W2))$

Folgende Fehler passieren in diesem Zusammenhang sehr häufig:

1. Durch fälschliches Kürzen von  $\sin(W2)$  werden folgende Formeln hergeleitet:

$$W1 = \text{ATAN2}(RS_{13}, -RS_{23}) \quad W3 = \text{ATAN2}(RS_{31}, RS_{32})$$

Im ATAN2 dürfen jedoch *nur positive Werte* gekürzt werden, andernfalls ergibt sich ein um  $180^\circ$  versetztes Ergebnis.

2. Weiterhin kann  $\sin(W2)$  im Nenner den Wert Null annehmen

d.h. im Beispiel:  $RS_{33} = \pm 1 \Rightarrow RS_{13} = RS_{23} = RS_{31} = RS_{32} = 0$  bzw.  $\text{ATAN2}(0,0)$  für W1 und W3. In diesem Fall kann W1 und W3 nicht aus den abgeleiteten Bestimmungsgleichungen berechnet werden. Aus den verbleibenden nichttrivialen Gleichungen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2 ist nur eine Aussage über  $\sin(W1 \pm W3)$  und über  $\cos(W1 \pm W3)$  möglich und einer der beiden Winkel W1 oder W3 ist beliebig wählbar.

Offensichtlich ist der erste Ansatz günstiger, insbesondere was die Analyse der Sonderfälle betrifft.

### 1.2.3 Operationen auf homogenen 4x4-Matrizen

#### Koordinatentransformation von Punkten

Die Transformation von Punktkoordinaten  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , bezogen auf ein Objekt, das durch eine Euler-Rotation  $\mathbf{RS} = \mathbf{Rz}(W1) \cdot \mathbf{Rx}(W2) \cdot \mathbf{Rz}(W3)$  und eine Translation  $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)^T$  aus dem Basiskoordinatensystem herausbewegt wurde, in die Basiskoordinaten  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  wird in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten so durchgeführt:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{RS} \\ \text{(vgl. Abschnitt 1.2.1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad P_1 = \mathbf{RS} \cdot P_2 + \mathbf{v}$$

Euler-Rotation Translation

In homogenen Koordinaten ist folgende vereinfachte Schreibweise möglich:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & v_x \\ & \mathbf{RS} & & v_y \\ & & & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad P_1 = \mathbf{Obj} \cdot P_2$$

homogene 4x4-Matrix **Obj**

**Obj** ist die Stellungsbeschreibung des Objektkoordinatensystems bezüglich des Basiskoordinatensystems. Wird – im Vorgriff auf eine im folgenden noch ausführlicher erläuterte Notationsform – das jeweils zugrundeliegende Bezugssystem für Punkt- und Vektorkoordinaten bzw. Stellungsangaben als hochgestellter Index links oben mitgeführt, so gilt für

$$P_1 = \mathbf{Obj} \cdot P_2 :$$

$${}^{\text{BKS}}P_1 = {}^{\text{BKS}}\mathbf{Obj} \cdot {}^{\text{Obj}}P_2$$

Diese Regel zur Um- und Berechnung von Vektorkoordinaten in beliebige Bezugssysteme ist vollkommen identisch mit der im übernächsten Abschnitt aufgeführten Verknüpfungsregel für relative Stellungsbeschreibungen.

### Koordinatentransformation von freien Vektoren

Die (Euler-Rotation und Translation  $\mathbf{v}$ ) eines Vektors  $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z, 0)^T$  in homogenen Koordinaten hat folgendes Aussehen:

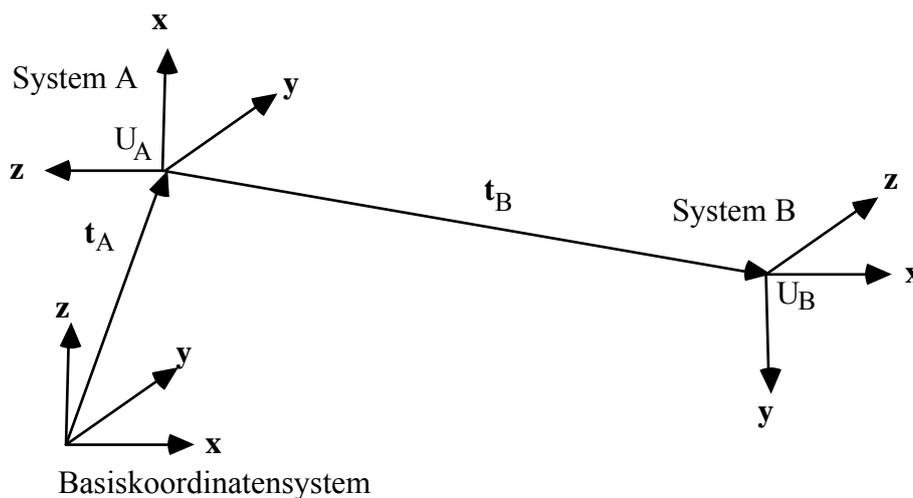
$$\begin{bmatrix} a_{x\text{neu}} \\ a_{y\text{neu}} \\ a_{z\text{neu}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & v_x & \\ & \mathbf{RS} & v_y & \\ & & v_z & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad {}^{\text{BKS}}\mathbf{a}_{\text{neu}} = {}^{\text{BKS}}\mathbf{Obj} \cdot {}^{\text{Obj}}\mathbf{a}$$

homogene 4×4-Matrix **Obj**

An diesen drei Gleichungen wird die Idee der homogenen Erweiterung nochmal deutlich. Durch eine geeignete Modifikation der dreidimensionalen Darstellung von Vektoren und Punkten kann der in kartesischen Koordinaten isoliert stehende Translationsvektor mit der Rotation zu einer einzigen Matrix zusammengefaßt werden. Sollen homogene en wie freie en [Bronstein 74] translationsinvariant sein, so darf nur eine Erweiterung mit 0 gewählt werden. Um sicherzustellen, daß Vektoren durch die Transformationsmatrix wieder auf Vektoren abgebildet werden, müssen die drei ersten Elemente der vierten (Erweiterungs-)Zeile der Transformationsmatrix Null sein. Da in der Roboterkinematik auch keine Skalierungsfunktionen notwendig sind, wird zur Beschreibung von Punkten im homogenen Raum und als letztes Element der Erweiterungszeile die 1 gewählt.

### Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen

Noch deutlicher sichtbar werden die Vorteile der homogenen 4×4-Matrix gegenüber der Darstellung in kartesischen Koordinaten bei der Verknüpfung zweier Stellungsangaben.



**Abb. 1.6:** Relativ definierte Stellungsangaben

Sei **A** eine  $3 \times 3$ -Rotationsmatrix zur Definition der Orientierung des Systems A bezüglich des Basiskoordinatensystems (vgl. Abb. 1.6) und **B** eine  $3 \times 3$ -Rotationsmatrix zur Definition der Orientierung des Systems B bezüglich des Systems A. Seien weiterhin  $\mathbf{t}_A$  und  $\mathbf{t}_B$  die Translationsvektoren vom Ursprung des jeweiligen Bezugssystems zum Objektursprung  $U_A$  bzw.  $U_B$ . Dann hat die Beschreibung des Systems B, bezogen auf das Basiskoordinatensystem, folgendes Aussehen:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ergibt die Orientierung des Systems B und

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_B + \mathbf{t}_A$  ergibt den Positionsvektor vom Basiskoordinatensystem zum Ursprung  $U_B$ .

Wird dagegen die Stellung mit den homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen **HA** und **HB** beschrieben, in denen außer der Orientierung auch die Translation enthalten ist, so ergibt sich die Stellung des Objekts B, bezogen auf das Basiskoordinatensystem, durch eine einfache Matrixmultiplikation **HA**•**HB**.

Die Anzahl von Rechenoperationen ist in beiden Fällen die gleiche, aber der Aufschreibungsaufwand und die formale Komplexität bei der Verknüpfung mehrstufig definierter Objektstellungen verringert sich bei der Verwendung homogener  $4 \times 4$ -Matrizen erheblich.

Gerade diese mehrstufige Definition von **en** ist für die **von** entscheidender Bedeutung. Sobald das "Teach"-Niveau verlassen wird, müssen bei den heute üblichen Roboterprogrammiersystemen alle Objektdaten wertemäßig erfaßt werden. Diese Werte nun aber direkt auf das Basiskoordinatensystem zu beziehen, wäre ein sehr mühseliges und unsinniges Unterfangen, weil z.B. beim Transport einer beladenen Palette nicht nur das Koordinatensystem der Palette, sondern auch alle Stellungsbeschreibungen für sämtliche auf der Palette befindlichen Objekte neu berechnet werden müßten. Ist dagegen die Palettenbestückung zum Palettenkoordinatensystem definiert, so genügt die Neuberechnung dieses Systems, um die Information über den Zustand der Roboterumgebung aktuell zu halten.

Die Möglichkeit der Verkettung von Stellungsbeschreibung Verkettung von -en durch einfache Matrixmultiplikationen ist einerseits sehr leistungsfähig, andererseits aber auch

fehlerträchtig, wenn der Benutzer sich nicht ständig völlige Klarheit über die benutzten Bezugssysteme schafft. Eine Verkettung von Stellungsbeschreibungen durch Matrixmultiplikationen ist natürlich nur dann sinnvoll und erlaubt, wenn die einzelnen Koordinatensysteme sich direkt aufeinander beziehen.

Für Fälle, in denen keine Eindeutigkeit besteht, welches Bezugssystem der Stellungsangabe zugrundeliegt, wird das Bezugskordinatensystem als hochgestellter Index links über dem Namen des Objektkordinatensystems angegeben. Als Abkürzungen benutzen wir  $\mathbf{B}$  für ein beliebiges Bezugssystem und  $\mathbf{BKS}$  für das Basis- bzw. Weltkoordinatensystem.

: Eine multiplikative Verknüpfung von relativen Stellungsbeschreibungen ist nur dann sinnvoll, wenn das Objektkordinatensystem  $S_{i-1}$  Bezugssystem für das nachfolgende Objektkordinatensystem  $S_i$  ist.

$$\text{formal: } \prod_{i=1}^n S_i \text{ ist sinnvoll} \Leftrightarrow S_i = S_{i-1} S_i \text{ mit } S_0 = \mathbf{B}, 1 \leq i \leq n$$

Für das Beispiel (vgl. Abb. 1.7) wurden folgende Werte gewählt:

Das Objektkordinatensystem  $S_1$  sei durch eine Transformation  $((3,3,0)^T, \mathbf{Rz}(90^\circ))$  aus dem Bezugssystem  $\mathbf{B}$  entstanden:  ${}^{\mathbf{B}}S_1$

Das Objektkordinatensystem  $S_2$  sei durch eine Transformation  $((-5,-5,0)^T, \mathbf{Rz}(-180^\circ))$  aus dem Koordinatensystem  $S_1$  entstanden:  ${}^{S_1}S_2$

Gesucht ist nun das Objektkordinatensystem  $S_2$  bezogen auf  $\mathbf{B}$ :  ${}^{\mathbf{B}}S_2$ .

Das Ergebnis der Berechnung

$${}^{\mathbf{B}}S_2 = {}^{\mathbf{B}}S_1 \cdot {}^{S_1}S_2$$

ist der Abb. 1.7 zu entnehmen.

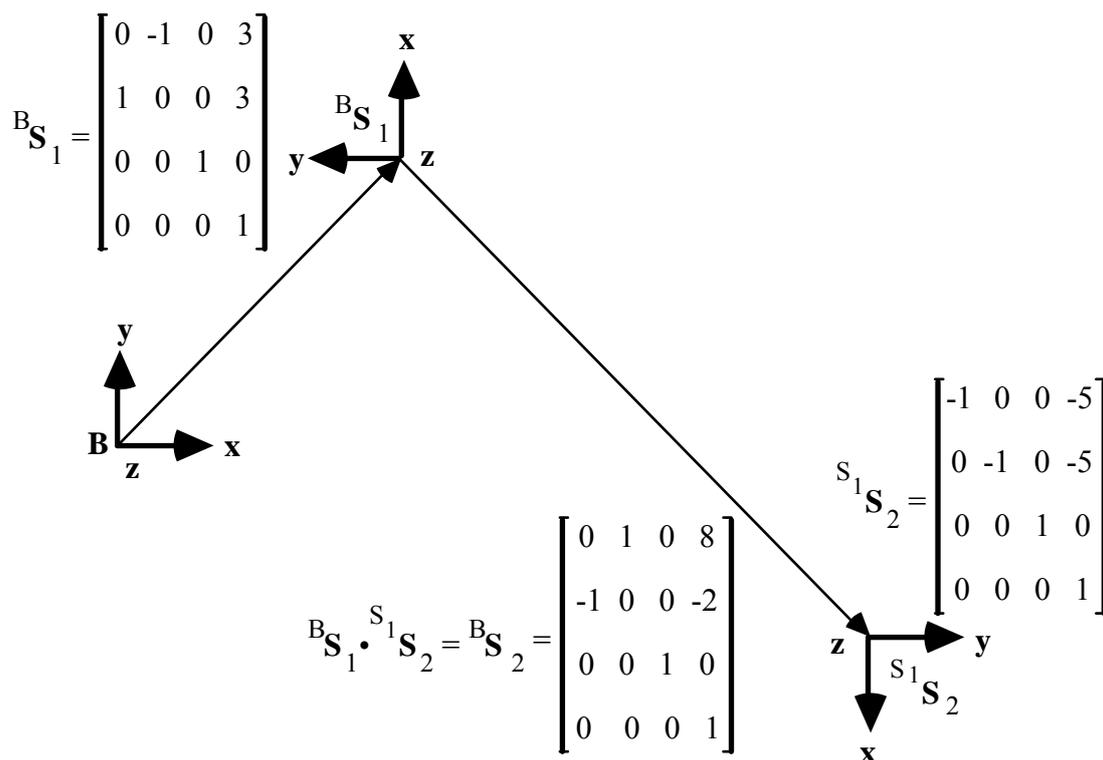


Abb. 1.7: Verknüpfung relativ definierter Stellungsangaben

Häufig besteht auch das umgekehrte Problem: Bekannt sind die beiden absoluten Stellungsbeschreibungen  ${}^B\mathbf{S}_1$  und  ${}^B\mathbf{S}_2$  und gesucht wird die relative Stellungsbeschreibung  ${}^{S_1}\mathbf{S}_2$ . Diese ist formal leicht zu bestimmen.

Aus  ${}^B\mathbf{S}_2 = {}^B\mathbf{S}_1 \cdot {}^{S_1}\mathbf{S}_2$  folgt  ${}^B\mathbf{S}_1^{-1} \cdot {}^B\mathbf{S}_2 = {}^{S_1}\mathbf{S}_2$ .

Wir müssen hierzu die Inverse der homogenen Matrix  ${}^B\mathbf{S}_1$  bestimmen. Ebenso wie die Inversen der Rotationsmatrizen  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  und  $\mathbf{R}_z$  läßt sich auch die Inverse einer homogenen  $4 \times 4$ -Matrix  $\mathbf{H}$  formelmäßig leicht angeben. Bezeichne  $\mathbf{h}_i$  die  $i$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{R}$  den linken oberen  $3 \times 3$ -Rotationsanteil von  $\mathbf{H}$ , dann gilt:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & -\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_4 \\ & \mathbf{R}^T & & -\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_4 \\ & & & -\mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Nachweis, daß  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{1}$  gilt, ist einfach zu führen. Im wesentlichen muß dabei nur auf die Orthonormiertheitsbedingung von  $\mathbf{R}$  zurückgegriffen werden.

Interessant ist auch die geometrische Interpretation der Inversen. Es gilt

$${}^B\mathbf{S}_1^{-1} = \mathbf{S}_1\mathbf{B},$$

d.h. Bezugs- und Objektkoordinatensystem vertauschen ihre Rolle. Nun sehen wir auch, daß die obige Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = {}^B\mathbf{S}_1^{-1} \cdot {}^B\mathbf{S}_2$$

unserer angegebenen Verknüpfungsregel genügt, wenn wir diese Beziehung für die Inverse ausnützen:

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1\mathbf{B} \cdot {}^B\mathbf{S}_2$$

Auf beiden Seiten ist das Bezugssystem  $\mathbf{S}_1$  und die multiplikative Verknüpfung auf der rechten Seite ist sinnvoll, da sich  ${}^B\mathbf{S}_2$  ja gerade auf  $\mathbf{B}$  bezieht.

Berechnen wir noch für unser Beispiel in Abb. 1.7 die Inverse

$${}^B\mathbf{S}_1^{-1} = \mathbf{S}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so sehen wir, daß das Ergebnis direkt aus dem Bild verifiziert werden kann.

### Zerlegung homogener 4×4-Matrizen in Rotations- und Translationsanteile

Gelegentlich ist die Aufspaltung einer homogenen 4×4-  $\mathbf{T}$  in ihren Rotations- und Translationsanteil sinnvoll. Diese Aufspaltung hat folgendes Aussehen:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Tt} \cdot \mathbf{TR},$$

wobei  $\mathbf{Tt}$  eine Transformationsmatrix ist, die nur den Translationsanteil von  $\mathbf{T}$  enthält, und  $\mathbf{TR}$  eine Transformationsmatrix darstellt, die nur den Rotationsanteil von  $\mathbf{T}$  beinhaltet.

Beispiel:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ liefert: } \mathbf{Tt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{TR} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist klar, daß im allgemeinen  $\mathbf{T} = \mathbf{Tt} \cdot \mathbf{TR} \neq \mathbf{TR} \cdot \mathbf{Tt}$  gilt, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Die Aufspaltung von  $\mathbf{T}$  zeigt, daß die Translation einer Transformationsmatrix immer im ursprünglich vorliegenden Bezugssystem ausgeführt wird und nicht bezüglich des durch den Rotationsanteil veränderten Bezugssystems.

Soll die Translation im veränderten Bezugssystem durchgeführt werden, so muß die gesuchte Transformationsmatrix durch Multiplikation der Matrizen  $\mathbf{TR}$  und  $\mathbf{Tt}$  ermittelt werden:  $\mathbf{T} = \mathbf{TR} \cdot \mathbf{Tt}$ .

### 1.2.4 Umrechnung homogener 4×4-Matrizen in duale 3×3-Matrizen

Der 3×3-Rotationsanteil der homogenen 4×4-Matrix wird unverändert als Primärteil der dualen Matrix übernommen:  $Dp_{ij} = H_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ .

Nach dem in Abschnitt 1.1.3 Gesagten beschreibt der Matrixspalte den Momentenvektor der durch den Primärteil als Orientierungsvektor gekennzeichneten Geraden. Ein wesentlicher Vorteil des Momentenvektors im Gegensatz zu dem die Raumposition der Geraden direkt wiedergebenden Lotvektor besteht darin, daß er durch Kreuzproduktbildung eines beliebigen Punktes der Geraden mit dem Orientierungsvektor der Geraden gewonnen werden kann. Wir erhalten also, da der in der 4. Spalte der homogenen 4×4-Matrix enthaltene Raumpunkt als Ursprung des Koordinatensystems Bestandteil aller 3 Geraden ist, die gesuchten Sekundärwerte durch:

$$(Ds_{1i}, Ds_{2i}, Ds_{3i})^T = (H_{14}, H_{24}, H_{34})^T \times (H_{1i}, H_{2i}, H_{3i})^T$$

Ein Beispiel für diese Umformung liefert der Vergleich von Bild 1.2 und Bild 1.4.

### 1.2.5 Umrechnung dualer 3×3-Matrizen in homogene 4×4-Matrizen

Der Primärteil der dualen Matrix ist identisch mit dem 3×3-Rotationsanteil der homogenen 4×4-Matrix:  $H_{ij} = Dp_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ ; die 4. Zeile einer homogenen Matrix  $\mathbf{H}$  hat immer die Form (0,0,0,1).

Es muß also nur noch der Ursprung des zu beschreibenden Koordinatensystems bestimmt werden. Dies ist möglich, indem der Schnittpunkt zweier durch die Spalten der dualen Matrix  $\mathbf{D}$  definierter Geraden bestimmt wird. Jede dieser Gerade läßt sich in Parameterform beschreiben durch  $\mathbf{l} + \lambda \cdot \mathbf{o}$ ,  $\lambda \in \mathfrak{R}$  (vgl. Abschnitt 1.1.3). In unserem Fall gilt  $\mathbf{l}_i = \mathbf{o}_i \times \mathbf{m}_i$ , wobei  $\mathbf{o}_i$  der im Primärteil einer Spalte enthaltene Orientierungsvektor und  $\mathbf{m}_i$  der im Sekundärteil enthaltene Momentenvektor ist.

Für den Schnittpunkt P zweier Geraden  $g_1$  und  $g_2$  gilt, sofern der Schnittpunkt existiert:

$$\mathbf{l}_1 + \lambda_1 \cdot \mathbf{o}_1 = \mathbf{l}_2 + \lambda_2 \cdot \mathbf{o}_2.$$

Diese Gleichung ist mit 3 Zeilen, aber nur 2 Variablen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in der Regel überbestimmt; da für eine Stellungsbeschreibung dieser Schnittpunkt jedoch sicher existiert, werden Ranganalysen für das lineare Gleichungssystem in  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  überflüssig. Durch Multiplikation mit dem Vektor  $\mathbf{o}_1$  (Skalarprodukt der Vektoren) verschwindet  $\lambda_2$  und es kann folgende Lösungsformel hergeleitet werden:

$$\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{o}_1 + \lambda_1 \cdot \mathbf{o}_1 \cdot \mathbf{o}_1 = \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{o}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{o}_2 \cdot \mathbf{o}_1$$

Mit  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{o}_1 \times \mathbf{m}_1$ ,  $(\mathbf{o}_1 \times \mathbf{m}_1) \cdot \mathbf{o}_1 = 0$ ,  $\mathbf{o}_1 \cdot \mathbf{o}_1 = 1$  und  $\mathbf{o}_2 \cdot \mathbf{o}_1 = 0$  folgt:

$$\lambda_1 = (\mathbf{o}_2 \times \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{o}_1$$

Wegen der Verwendung von  $\mathbf{o}_2 \cdot \mathbf{o}_1 = 0$  gilt diese Lösungsformel von  $\lambda_1$  nur, wenn die Geraden orthogonal sind, und deshalb  $\mathbf{o}_2 \cdot \mathbf{o}_1 = 0$  gilt!

Damit ergeben sich die restlichen gesuchten H-Werte:

$$\begin{aligned} (H_{14}, H_{24}, H_{34})^T &= \mathbf{o}_1 \times \mathbf{m}_1 + ((\mathbf{o}_2 \times \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{o}_1) \cdot \mathbf{o}_1 = \\ &= (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \\ &+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \\ &\cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \end{aligned}$$

Diese Transformationsberechnungen werden am Beispiel der Bilder 1.2 und 1.4 explizit vorgeführt:

Aus Bild 1.2 ist abzulesen:  $(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T = (u_x, u_y, u_z)^T$

Die Lösungsformel liefert mit den Zahlenwerten aus Bild 1.4:

$$\begin{aligned} &(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T \\ &= (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \\ &+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \\ &\cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \\ &= (0, 0, -1)^T \times (-u_y, u_x, 0)^T + (((0, 1, 0)^T \times (-u_z, 0, u_x)^T) \cdot (0, 0, -1)^T) \cdot (0, 0, -1)^T \\ &= (u_x, u_y, 0)^T + ((u_x, 0, u_z)^T \cdot (0, 0, -1)^T) \cdot (0, 0, -1)^T \\ &= (u_x, u_y, 0)^T + (-u_z) \cdot (0, 0, -1)^T = (u_x, u_y, u_z)^T \end{aligned}$$

## 1.2.6 Operationen auf dualen 3×3-Matrizen

### Koordinatentransformation von Punktkoordinaten

Gegeben sei ein Punkt  $P = (p_x, p_y, p_z)^T$ , der durch eine duale 3×3-Matrix  $\mathbf{D} = \mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$  in den Punkt  $P_{\text{neu}}$  transformiert werden soll. Da duale 3×3-Matrizen der Liniengeometrie und nicht der Punktgeometrie zuzuordnen sind, ist eine Punkttransformation durch duale Matrizen nur über Umwege möglich; z.B. kann der Punkt P als Ursprung in ein Koordinatensystem, dargestellt als duale 3×3-Matrix, eingebettet werden oder die duale Transformationsmatrix wird in eine homogene 4×4-Matrix umgeformt. Mit der zweiten Variante ergibt sich die vierte Spalte der zu  $\mathbf{D}$  äquivalenten 4×4-Matrix  $\mathbf{H}$  laut Abschnitt 1.2.5 zu

$$\begin{aligned} (H_{14}, H_{24}, H_{34})^T &= \\ &= (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \end{aligned}$$

$$+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T$$

und die neuen Punktkoordinaten sind über eine Transformation des Punktes P nach den Regeln bei homogenen 4x4-Transformationsmatrizen gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{\text{neu}} &= \mathbf{H} \cdot (p_x, p_y, p_z, 1)^T = \mathbf{Dp} \cdot (p_x, p_y, p_z)^T + (H_{14}, H_{24}, H_{34})^T \\ &= \mathbf{Dp} \cdot (p_x, p_y, p_z)^T + (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \\ &\quad + (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \\ &\quad \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \end{aligned}$$

### Koordinatentransformation von freien en und GTransformation einer Raumgeraden

Ein freier Vektor  $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)^T$  wird durch eine duale 3x3-Matrix  $\mathbf{D}=\mathbf{Dp}+\varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$  in völliger Analogie zu homogenen 4x4-Matrizen transformiert, d.h.

$$\mathbf{v}_{\text{neu}} = \mathbf{Dp} \cdot \mathbf{v} \quad \{ \equiv \mathbf{H} \cdot (v_x, v_y, v_z, 0)^T \}$$

Eine Gerade g – dargestellt durch eine dualen 3x1-Vektor  $(gd_x, gd_y, gd_z)^T$ , der den normierten Richtungsvektor  $(gdp_x, gdp_y, gdp_z)^T$  und das Moment  $(gds_x, gds_y, gds_z)^T$  der Geraden beinhaltet – wird durch eine duale 3x3-Matrix  $\mathbf{D}=\mathbf{Dp}+\varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$  in folgender Weise transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\text{neu}} &= \mathbf{D} \cdot (gd_x, gd_y, gd_z)^T = \\ &= \mathbf{Dp} \cdot (gdp_x, gdp_y, gdp_z)^T + \varepsilon \cdot \{ \mathbf{Dp} \cdot (gds_x, gds_y, gds_z)^T + \mathbf{Ds} \cdot (gdp_x, gdp_y, gdp_z)^T \} \end{aligned}$$

Der Nachweis, daß die Formel für  $\mathbf{g}_{\text{neu}}$  tatsächlich die durch eine Transformation  $\mathbf{D}$  aus der Geraden g entstandene neue Gerade beschreibt, wird im nächsten Abschnitt bewiesen; g wird dazu als eine Spalte einer dualen 3x3-Matrix in ein beliebiges Koordinatensystem eingebettet.

### Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen

Wie wir im folgenden zeigen, läßt sich die Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen mit dualen 3x3-Matrizen auf die Multiplikation dieser 3x3-Matrizen zurückführen. Dabei gelten hinsichtlich der Bezugssysteme die in 1.2.1 und 1.2.3 gemachten Aussagen. Wird der Primärteil einer dualen 3x3-Matrix isoliert betrachtet, so zeigt sich die Identität mit der 3x3-Rotationsinformation der homogenen 4x4-Matrix. Auch die Multiplikation bei dualen Matrizen ist für den Primärteil identisch mit der Multiplikation von 3x3-Rotationsanteilen aus homogenen 4x4-Matrizen. Insofern gelten für den Primärteil der dualen 3x3-Matrix alle für den Rotationsanteil der homogenen 4x4-Matrix nachgewiesenen Gesetzmäßigkeiten (z.B. Orthonormiertheit invariant gegenüber Multiplikation). Es muß lediglich noch gezeigt werden, daß durch die 3x3-Matrixmultiplikation bei dualen Matrizen der resultierende Sekundärteil eine sinnvolle,

d.h. eine der durch Stellungsverknüpfung neu entstandenen Stellung entsprechende Aussage liefert.

Es seien **F**, **G** und **H** homogene 4×4-Matrizen mit der Eigenschaft:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{H}$$

Eine Aufspaltung von **F** in den 3×3-Rotationsanteil **FR** und den 3×1-Translationsanteil **Ft** und von **G** in den Rotationsanteil **GR** und den Translationsanteil **Gt** führt für **H = F·G** zum Rotationsanteil **HR = FR·GR** und zum Translationsvektor **Ht = FR·Gt+Ft**.

Bei einem Übergang zu den zugehörigen dualen 3×3-Matrizen **DF** (entspricht **F**), **DG** (entspricht **G**) und **DH** (entspricht **H**) zeigt sich mit **F·G = H** sofort die Identität der Primärteile von

$$\mathbf{DFp} \cdot \mathbf{DGp} = \mathbf{FR} \cdot \mathbf{GR} \text{ und } \mathbf{DHp} = \mathbf{HR} = \mathbf{FR} \cdot \mathbf{GR}.$$

Im folgenden wird die Gleichheit der Sekundärteile von **DF·DG** und **DH** nachgewiesen; dazu ist entsprechend der Multiplikationsvorschrift für duale Matrizen (vgl. Abschnitt 1.1.3) zu zeigen:

$$(\text{Primärteil von } \mathbf{DF}) \cdot (\text{Sekundärteil von } \mathbf{DG}) + (\text{Sekundärteil von } \mathbf{DF}) \cdot (\text{Primärteil von } \mathbf{DG}) = \text{Sekundärteil von } \mathbf{DH}$$

Entsprechend der Umformungsvorschrift von homogenen zu dualen Matrizen (Abschnitt 1.2.4) und mit **f<sub>i</sub>** und **g<sub>i</sub>** als Bezeichnung der Matrixspalten von **FR** und **GR** lautet obige Gleichung:

$$\mathbf{FR} \cdot (\mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_1 \quad \mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_3) + (\mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{GR} \\ = ((\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt} + \mathbf{Ft}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_1) \quad (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt} + \mathbf{Ft}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_2) \quad (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt} + \mathbf{Ft}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_3))$$

Bei spaltenweiser Betrachtung läßt sich diese Matrixgleichung reduzieren zu

$$\mathbf{FR} \cdot (\mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_i) + (\mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{g}_i = (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt} + \mathbf{Ft}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_i) \quad i=1,2,3$$

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren **Ft×v** kann durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation **K·v** dargestellt werden, wobei die Matrix **K** als sogenannte Kreuzproduktmatrix [Glavina 85] des Vektors **Ft** folgende Form hat:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -Ft_z & Ft_y \\ Ft_z & 0 & -Ft_x \\ -Ft_y & Ft_x & 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt} + \mathbf{Ft}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_i) = (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_i) + \mathbf{Ft} \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_i) = \mathbf{FR} \cdot (\mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_i) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_i$$

$$= \mathbf{FR} \cdot (\mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_i) + (\mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_1 \ \mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_2 \ \mathbf{Ft} \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{g}_i \quad i=1,2,3$$

Da  $\mathbf{FR}$  eine Orthonormalmatrix ist, können Rotation und Kreuzproduktbildung zweier Vektoren vertauscht werden:  $(\mathbf{FR} \cdot \mathbf{Gt}) \times (\mathbf{FR} \cdot \mathbf{g}_i) = \mathbf{FR} \cdot (\mathbf{Gt} \times \mathbf{g}_i)$

Hiermit ist die Äquivalenz der Sekundärteile gezeigt und damit der Nachweis erbracht, daß die  $3 \times 3$ -Matrixmultiplikation eine sinnvolle Verknüpfungsoption für duale Matrizen definiert.

Die Inverse einer dualen  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{D}$ , die zur Darstellung eines kartesischen Koordinatensystems verwendet wird, lautet:

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$$

Zum Nachweis, daß  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{E}$  gilt, muß außer auf die Orthonormiertheit des Primärteils auch auf die Tatsache zurückgegriffen werden, daß sich alle drei Geraden in einem Punkt  $U$  schneiden.

$$\text{a) } \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{Dp}^T + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}^T) \cdot (\mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}) = \mathbf{Dp}^T \cdot \mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot (\mathbf{Dp}^T \cdot \mathbf{Ds} + \mathbf{Ds}^T \cdot \mathbf{Dp})$$

Primärteil  $\mathbf{Dp}^T \cdot \mathbf{Dp} = \mathbf{E}$  wegen Orthonormiertheit des Primärteils  $\mathbf{Dp}$  (vgl. Abschnitt 1.2.5)

Mit den Bezeichnungen  $\mathbf{o}_i$ ,  $\mathbf{m}_i$  und  $\mathbf{u}$  für Orientierungs-, Momenten- und Ursprungsvektor und mit  $\mathbf{m}_i = \text{Lot} \times \mathbf{o}_i = \mathbf{u} \times \mathbf{o}_i$  (vgl. Abschnitt 1.1.3) gilt für jedes Element  $s_{ij}$  des Sekundärteils  $\mathbf{Dp}^T \cdot \mathbf{Ds} + \mathbf{Ds}^T \cdot \mathbf{Dp}$ :

$$\begin{aligned} s_{ij} &= (\text{i-te Primärspalte von } \mathbf{D}) \cdot (\text{j-te Sekundärspalte von } \mathbf{D}) \\ &+ (\text{i-te Sekundärspalte von } \mathbf{D}) \cdot (\text{j-te Primärspalte von } \mathbf{D}) \\ &= \mathbf{o}_i \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{o}_j) + (\mathbf{u} \times \mathbf{o}_i) \cdot \mathbf{o}_j = (\mathbf{o}_j \times \mathbf{o}_i) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{o}_j \times \mathbf{o}_i) \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [\text{Brand 57}] \end{aligned}$$

$$\text{Damit gilt: } \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{Dp}^T \cdot \mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot (\mathbf{Dp}^T \cdot \mathbf{Ds} + \mathbf{Ds}^T \cdot \mathbf{Dp}) = \mathbf{E} + \varepsilon \cdot \mathbf{0} = \mathbf{E}$$

$$\text{b) } \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T = (\mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}) \cdot (\mathbf{Dp}^T + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}^T) = \mathbf{Dp} \cdot \mathbf{Dp}^T + \varepsilon \cdot (\mathbf{Dp} \cdot \mathbf{Ds}^T + \mathbf{Ds} \cdot \mathbf{Dp}^T)$$

Primärteil  $\mathbf{Dp} \cdot \mathbf{Dp}^T = \mathbf{E}$  wegen Orthonormiertheit des Primärteils  $\mathbf{Dp}$  (vgl. Abschnitt 1.2.5)

$s_{ij} = 0$  für alle Elemente des Sekundärteils von  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T$  wird analog zu a) über zeilenweisen Ansatz hergeleitet.

### 1.2.7 Operationen auf dualen Quaternionen

Wie in Abschnitt 1.1.4 erläutert, kann durch eine duale Quaternion eine Drehung und eine Schiebung bezüglich ein und derselben Achse dargestellt werden. Da für die Roboterkinematik nur längen- und winkeltreue Abbildungen interessieren und zusätzliche Abbildungseigenschaften wie Streckung und Verzerrung für dieses Anwendungsgebiet nicht benötigt werden, wird die weitere Betrachtung auf eine Untermenge der dualen Quaternionen beschränkt. Dazu wird eine *Norm*  $N(\mathbf{DQ})$  Norm für duale Quaternionen  $\mathbf{DQ} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$  definiert durch

$$N(\mathbf{DQ}) = \sum_{i=1}^4 d_i^2.$$

und die Menge der Einheitsquaternionen ausgezeichnet.

Eine Dualquaternion  $\mathbf{DQ}$  mit  $N(\mathbf{DQ}) = 1 + \varepsilon \cdot 0$  heißt *Einheitsq* und kann immer in die Form  $\mathbf{DQ} = (\cos(D\varphi), \sin(D\varphi) \cdot n_1, \sin(D\varphi) \cdot n_2, \sin(D\varphi) \cdot n_3)$  mit  $(n_1, n_2, n_3)^T$  als dualer Einheitsgeraden umgeschrieben werden. Daß für die duale - Gerade  $(n_1, n_2, n_3)^T$  immer Werte existieren, so daß  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 + \varepsilon \cdot 0$  (Einheitsgerade) gilt, folgt unmittelbar aus  $N(\mathbf{DQ}) = 1$  und  $\cos^2(D\varphi) + \sin^2(D\varphi) = 1$ . Mit obiger Definition einer dualen Einheitsgeraden garantiert die Bedingung  $N(\mathbf{DQ}) = 1 + \varepsilon \cdot 0$  sowohl die Normiertheit des Richtungsvektors (Primärteil) als auch die Orthogonalität zwischen Richtungsvektor und Momentenvektor im Sekundärteil der Geraden und fügt sich somit nahtlos in die bisher verwendete Darstellung von Raumgeraden ein.

Im Gegensatz zum sechsdimensionalen Beschreibungsvektor kann für duale Quaternionen eine sinnvolle Verknüpfungsoperation definiert werden; allerdings handelt es sich hierbei um eine sehr komplexe Verknüpfungsvorschrift.

#### Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen

Zwei Dualquaternionen  $\mathbf{DQ}_a = (d_{1a}, d_{2a}, d_{3a}, d_{4a})$  und  $\mathbf{DQ}_b = (d_{1b}, d_{2b}, d_{3b}, d_{4b})$  werden nach folgenden Regeln miteinander verknüpft:

$$\mathbf{DQ}_a + \mathbf{DQ}_b = (d_{1a} + d_{1b}, d_{2a} + d_{2b}, d_{3a} + d_{3b}, d_{4a} + d_{4b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{DQ}_a \cdot \mathbf{DQ}_b &= (d_{1a} \cdot d_{1b} - (d_{2a}, d_{3a}, d_{4a}) \cdot (d_{2b}, d_{3b}, d_{4b})^T, \\ &\quad d_{1a} \cdot (d_{2b}, d_{3b}, d_{4b}) + d_{1b} \cdot (d_{2a}, d_{3a}, d_{4a}) + (d_{2a}, d_{3a}, d_{4a}) \times (d_{2b}, d_{3b}, d_{4b})) \\ &= (d_{1a} \cdot d_{1b} - d_{2a} \cdot d_{2b} - d_{3a} \cdot d_{3b} - d_{4a} \cdot d_{4b}, \\ &\quad d_{1a} \cdot d_{2b} + d_{1b} \cdot d_{2a} + d_{3a} \cdot d_{4b} - d_{4a} \cdot d_{3b}, \\ &\quad d_{1a} \cdot d_{3b} + d_{1b} \cdot d_{3a} + d_{4a} \cdot d_{2b} - d_{2a} \cdot d_{4b}, \\ &\quad d_{1a} \cdot d_{4b} + d_{1b} \cdot d_{4a} + d_{2a} \cdot d_{3b} - d_{3a} \cdot d_{2b}) \end{aligned}$$

Duale Quaternionen bilden einen Ring  $\mathbf{DQ}(+, \cdot)$ ; die Menge der dualen Einheitsquaternionen ist bezüglich der Multiplikation wegen  $N(\mathbf{DQ}_1 \cdot \mathbf{DQ}_2) = N(\mathbf{DQ}_1) \cdot N(\mathbf{DQ}_2)$  abgeschlossen und somit eine Untergruppe von  $\mathbf{DQ}$ . Die multiplikative Verknüpfung von Dualquaternionen beschreibt – von links nach rechts gelesen – die Hintereinanderausführung mehrerer Drehungen und Schiebungen, jeweils bezogen auf das zuletzt bewegte Objektkoordinatensystem. Details zur Verknüpfungsvorschrift von Dualquaternionen finden sich in [Glavina 85].

### Koordinatent von freien Vektoren und GTransformation einer Raumgeraden

Eine duale - Zahl  $d$  läßt sich als Dualquaternion  $(d, 0, 0, 0)$  darstellen. Definiert man die zu  $\mathbf{DQ}$  konjugierte  $K(\mathbf{DQ})$  durch Vorzeichenwechsel der letzten drei dualen Zahlen

$$K(\mathbf{DQ}) = (d_1, -d_2, -d_3, -d_4),$$

dann ergibt sich die Norm  $N(\mathbf{DQ})$  - dargestellt als duale Zahl in Quaternionenstruktur – durch  $N(\mathbf{DQ}) = \mathbf{DQ} \cdot K(\mathbf{DQ}) = K(\mathbf{DQ}) \cdot \mathbf{DQ}$ , wobei  $N(\mathbf{DQ})$  von der Form  $(d, 0, 0, 0)$  ist.

Da 1 - als Quaternion  $(1, 0, 0, 0)$  verstanden - das neutrale Element der Quaternionenmultiplikation darstellt, ergibt sich für Einheitsquaternionen (mit  $N(\mathbf{DQ})=1$ ) aus obiger Gleichung die Standarddefinition für inverse Elemente:

$$1 = \mathbf{DQ} \cdot K(\mathbf{DQ}) = K(\mathbf{DQ}) \cdot \mathbf{DQ}$$

Die zur Einheitsquaternion  $\mathbf{DQ}$  iInverse einer Quaternion  $\mathbf{DQ}^{-1}$  kann daher durch Konjugation bestimmt werden:

$$\mathbf{DQ}^{-1} = K(\mathbf{DQ}) \quad \text{falls } N(\mathbf{DQ})=1$$

So wie die dualen Zahlen als Untermenge  $(d, 0, 0, 0)$  der Dualquaternionen aufgefaßt werden können, lassen sich Raumgeraden – bisher beschrieben durch einen dualenduale-r Vektor  $(dg_1, dg_2, dg_3)^T$  – als Teilmenge  $G = \{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = (0, dg_1, dg_2, dg_3) \}$  der Dualquaternionen darstellen.

Die auf Einheitsquaternionen beschränkte Transformationsvorschrift " $\mathbf{g}' = \mathbf{DQ} \cdot \mathbf{g} \cdot K(\mathbf{DQ})$ " ( $= \mathbf{DQ} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{DQ}^{-1}$ ) bildet die Raumgerade  $\mathbf{g}$  in die Raumgerade  $\mathbf{g}'$  ab. In der Quaternionendarstellung  $\mathbf{DQ} = (\cos(D\varphi), \sin(D\varphi) \cdot n_1, \sin(D\varphi) \cdot n_2, \sin(D\varphi) \cdot n_3)$  beschreibt dabei  $(n_1, n_2, n_3)^T$  die Einheitsgerade im Raum, um die gedreht und entlang der geschoben wird, und  $D\varphi = p + \varepsilon \cdot s$  gibt den *halben Winkel*  $p$  und die *halbe Strecke*  $s$  an, um die durch die Einheitsquaternion  $\mathbf{DQ}$  bewegt wurde. Der Beweis für diese Aussagen befindet sich in [Glavina 85].

Die Transformation eines freien Vektors kann in die Behandlung von Raumgeraden eingebettet werden; da für freie Vektoren lediglich die Orientierungsinformation, nicht aber die Position von Bedeutung ist, genügt der Unterring  $\mathbf{Q}(+, \cdot)$  der reellen Quaternionen. Ein Vektor  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  wird zur reellen Quaternion  $(0, v_x, v_y, v_z)$  erweitert und durch die

Abbildungsvorschrift " $\mathbf{v}' = \mathbf{Qp} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{Qp})$ " entsprechend der dualen Quaternion  $\mathbf{DQ} = \mathbf{Qp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Qs}$  transformiert.

### Koordinatentransformation von Punktkoordinaten

Eine sogenannte "*Epsilon-Konjugation*" ist durch Vorzeichenwechsel in den Sekundärwerten einer Dualquaternion definiert:

$$E(\mathbf{DQ}) = (dp_1 - \varepsilon \cdot ds_1, dp_2 - \varepsilon \cdot ds_2, dp_3 - \varepsilon \cdot ds_3, dp_4 - \varepsilon \cdot ds_4).$$

Ein Punkt mit den Koordinaten  $P = (x_1, x_2, x_3)$  wird durch eine duale Einheitsquaternion  $\mathbf{DQ}$  nach folgendem Verfahren in den neuen Raumpunkt  $P'$  transformiert:

$$\text{Dualquaternion } \mathbf{DX} := (1, \varepsilon \cdot x_1, \varepsilon \cdot x_2, \varepsilon \cdot x_3)$$

$$\mathbf{DX}' := \mathbf{DQ} \cdot \mathbf{DX} \cdot \mathbf{K}(E(\mathbf{DQ})) = (1, \varepsilon \cdot x_1', \varepsilon \cdot x_2', \varepsilon \cdot x_3')$$

Aus  $\mathbf{DX}'$  können die Koordinaten des neuen Punktes  $P' = (x_1', x_2', x_3')$  abgelesen werden. Ein Beweis, daß die oben definierte Abbildung die gewünschte Bewegung (Rotation  $2p$  und Translation  $2s$  um  $(n_1, n_2, n_3)^T$ ) realisiert, findet sich in [Blaschke 60].

## 1.2.8 Umrechnung homogener 4×4-Matrizen in duale Quaternionen

Die Transformation einer homogenen 4×4-Matrix  $\mathbf{H}$  Transformation einer homogenen 4×4-Matrix in eine Dualquaternion  $\mathbf{DQ}$  wollen wir hier über die Verwendung von Eulerwinkel zur Angabe der Orientierung durchführen; ein "direktes" Verfahren, bei dem aus dem 3×3-Orientierungsteil  $\mathbf{RS}$  der Matrix  $\mathbf{H}$  die Rotationsachse  $(n_1, n_2, n_3)^T$  und der Winkel  $\varphi$  bestimmt werden, ist in [Paul 81a] erläutert; vor diese reelle Rotationsquaternion muß dann noch die aus  $(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T$  resultierende duale Translationsquaternion multipliziert werden.

Der in Abschnitt 1.2.2 vorgestellte Ansatz  $\mathbf{Rx}(W2) \cdot \mathbf{Rz}(W3) = \mathbf{Rz}(W1)^{-1} \cdot \mathbf{RS}$  liefert die Gleichungen

$$1.3: \quad 0 = \cos(W1) \cdot H_{13} + \sin(W1) \cdot H_{23}$$

$$2.3: \quad -\sin(W2) = -\sin(W1) \cdot H_{13} + \cos(W1) \cdot H_{23}$$

$$3.3: \quad \cos(W2) = H_{33}$$

$$1.2: \quad -\sin(W3) = \cos(W1) \cdot H_{12} + \sin(W1) \cdot H_{22}$$

$$1.1: \quad \cos(W3) = \cos(W1) \cdot H_{11} + \sin(W1) \cdot H_{21}$$

Die Eulerwinkel  $W1$ ,  $W2$  und  $W3$  ergeben sich damit zu

$$W1 = \text{ATAN2}(H_{13}, -H_{23}) \quad \text{bzw.} \quad W1 = 0 \quad (\text{willkürlich}) \quad \text{falls } H_{13}=0 \quad \text{und} \quad H_{23}=0$$

$$W2 = \text{ATAN2}(\sin(W1) \cdot H_{13} - \cos(W1) \cdot H_{23}, H_{33})$$

$$W3 = \text{ATAN2}(-\cos(W1) \cdot H_{12} - \sin(W1) \cdot H_{22}, \cos(W1) \cdot H_{11} + \sin(W1) \cdot H_{21})$$

Mit  $\varphi_1 := \frac{W1}{2}$ ,  $\varphi_2 := \frac{W2}{2}$ ,  $\varphi_3 := \frac{W3}{2}$  und  $d := \sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2 + H_{34}^2}$  (Länge des Translationsvektors) lassen sich die Translation und die einzelnen Rotationen  $W_i$  beschreiben durch das Quaternionenprodukt

$$\begin{aligned} & (\cos(\varepsilon \cdot d/2), \sin(\varepsilon \cdot d/2) \cdot H_{14}/d, \sin(\varepsilon \cdot d/2) \cdot H_{24}/d, \sin(\varepsilon \cdot d/2) \cdot H_{34}/d) \cdot \\ & (\cos(\varphi_1), 0, 0, \sin(\varphi_1)) \cdot (\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2), 0, 0) \cdot (\cos(\varphi_3), 0, 0, \sin(\varphi_3)) \end{aligned}$$

Die Lösung für die gesuchte Quaternion **DQ** lautet also:

$$\begin{aligned} & (1, \varepsilon \cdot H_{14}/2, \varepsilon \cdot H_{24}/2, \varepsilon \cdot H_{34}/2) \cdot \\ & (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_3) - \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3), \\ & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_3) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3), \\ & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_3) - \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3), \\ & \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_3) + \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3)) \end{aligned}$$

### 1.2.9 Umrechnung dualer Quaternionen in homogene 4×4-Matrizen

Für die Umrechnung einer Dualquaternion **DQ** Transformation einer Dualquaternion in eine homogene 4×4-Matrix **H** greifen wir auf die im Abschnitt 1.2.7 definierten Transformationsvorschriften für Raumgeraden, freien Vektoren und Punkte zurück und bilden die Orientierungsvektoren **x**, **y** und **z** des Bezugssystems mittels der Quaternion **DQ** in die zugehörigen stellungsbeschreibenden Achsvektoren ab. Die ebenfalls definierte Punkttransformation des Ursprungs liefert dann die noch ausstehende Information über die 4. Spalte der Matrix **H**. Da für die ersten drei Spalten von **H** nur die Orientierung ausschlaggebend ist, kann sich dort die Berechnung auf den Primärteil **Qp** der Quaternion **DQ** beschränken (vgl. Bemerkung zur Transformation freier Vektoren).

Es gilt:

$$(0, H_{11}, H_{21}, H_{31}) = (dp_1, dp_2, dp_3, dp_4) \cdot (0, 1, 0, 0) \cdot (dp_1, -dp_2, -dp_3, -dp_4)$$

$$(0, H_{12}, H_{22}, H_{32}) = (dp_1, dp_2, dp_3, dp_4) \cdot (0, 0, 1, 0) \cdot (dp_1, -dp_2, -dp_3, -dp_4)$$

$$(0, H_{13}, H_{23}, H_{33}) = (dp_1, dp_2, dp_3, dp_4) \cdot (0, 0, 0, 1) \cdot (dp_1, -dp_2, -dp_3, -dp_4)$$

$$(1, \varepsilon \cdot H_{14}, \varepsilon \cdot H_{24}, \varepsilon \cdot H_{34}) = (d_1, d_2, d_3, d_4) \cdot (1, 0, 0, 0) \cdot$$

$$(dp_1 - \varepsilon \cdot ds_1, -dp_2 + \varepsilon \cdot ds_2, -dp_3 + \varepsilon \cdot ds_3, -dp_4 + \varepsilon \cdot ds_4)$$

$$(H_{41}, H_{42}, H_{43}, H_{44}) = (0, 0, 0, 1)$$

Liegt die Quaternion **DQ** in der Form  $\mathbf{DQ} = (\cos(\varphi + \varepsilon \cdot d), \sin(\varphi + \varepsilon \cdot d) \cdot (n_1 + \varepsilon \cdot m_1, n_2 + \varepsilon \cdot m_2, n_3 + \varepsilon \cdot m_3))$  vor, so lautet die homogene 4×4-Matrix **H** [Paul 81a, Rooney 78, Glavina 85]:

$$H_{11} = n_1^2 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) + \cos(2\varphi)$$

$$H_{12} = n_2 \cdot n_1 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) - n_3 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$H_{13} = n_3 \cdot n_1 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) + n_2 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$H_{21} = n_1 \cdot n_2 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) + n_3 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$H_{22} = n_2^2 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) + \cos(2\varphi)$$

$$H_{23} = n_3 \cdot n_2 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) - n_1 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$H_{31} = n_1 \cdot n_3 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) - n_2 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$H_{32} = n_2 \cdot n_3 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) + n_1 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$H_{33} = n_3^2 \cdot (1 - \cos(2\varphi)) + \cos(2\varphi)$$

$$H_{14} = n_1 \cdot 2 \cdot d + m_1 \cdot \sin(2\varphi) + (n_2 \cdot m_3 - n_3 \cdot m_2) \cdot (1 - \cos(2\varphi))$$

$$H_{24} = n_2 \cdot 2 \cdot d + m_2 \cdot \sin(2\varphi) + (n_3 \cdot m_1 - n_1 \cdot m_3) \cdot (1 - \cos(2\varphi))$$

$$H_{34} = n_3 \cdot 2 \cdot d + m_3 \cdot \sin(2\varphi) + (n_1 \cdot m_2 - n_2 \cdot m_1) \cdot (1 - \cos(2\varphi))$$

$$H_{41} = 0$$

$$H_{42} = 0$$

$$H_{43} = 0$$

$$H_{44} = 1$$

In völliger Analogie zur homogenen 4×4- läßt sich aus der Dualquaternion **DQ** die zugehörige 3×3-Dualmatrix **D** ermitteln:

$$(0, D_{11}, D_{21}, D_{31}) = \mathbf{DQ} \cdot (0, 1, 0, 0) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{DQ})$$

$$(0, D_{12}, D_{22}, D_{32}) = \mathbf{DQ} \cdot (0, 0, 1, 0) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{DQ})$$

$$(0, D_{13}, D_{23}, D_{33}) = \mathbf{DQ} \cdot (0, 0, 0, 1) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{DQ})$$

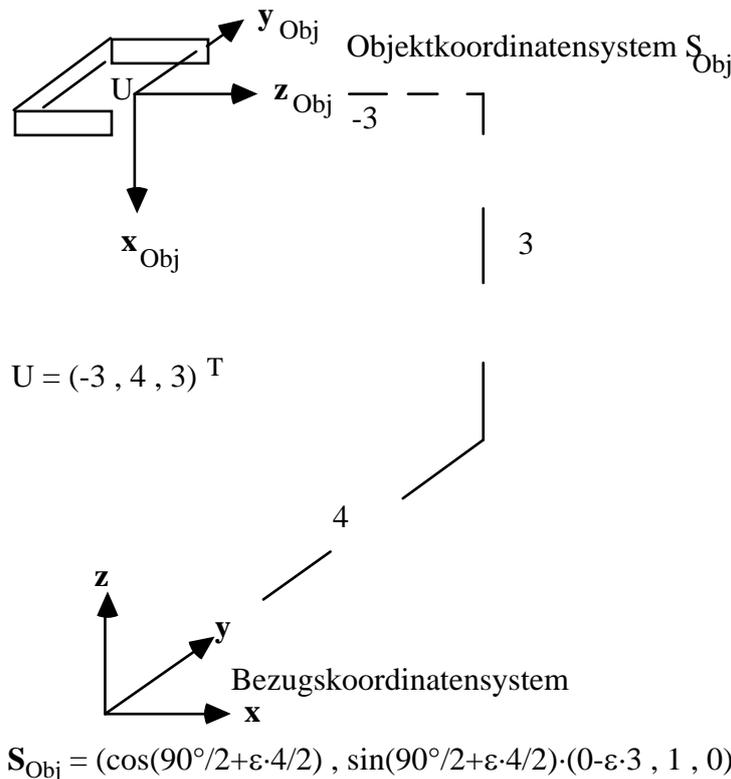
Der Einsatz von Dualquaternionen zur Stellungsbeschreibung eines Objekts und die Verfahren zur Transformation in äquivalente Darstellungsformen werden im folgenden an dem in Abb. 1.8 illustrierten Beispiel demonstriert.

Die Stellung des Objekts ergibt sich durch eine 90°-Drehung um die zur y-Achse parallele, durch den Punkt  $(0, 0, 3)^T$  laufende Achse  $(0 - \varepsilon \cdot 3, 1, 0)^T$  und eine Schiebung um 4 Einheiten entlang dieser Achse.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\text{Obj}} &= (\cos(90^\circ/2+\varepsilon\cdot 4/2), \sin(90^\circ/2+\varepsilon\cdot 4/2)\cdot(0-\varepsilon\cdot 3, 1, 0)) \\
 &= (\cos(90^\circ/2)-\varepsilon\cdot 4/2\cdot\sin(90^\circ/2), (\sin(90^\circ/2)+\varepsilon\cdot 4/2\cdot\cos(90^\circ/2))\cdot(0-\varepsilon\cdot 3, 1, 0)) \\
 &= (\sqrt{2}/2-\varepsilon\cdot\sqrt{2}, -\varepsilon\cdot 3\cdot\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2+\varepsilon\cdot\sqrt{2}, 0)
 \end{aligned}$$

Das Umrechnen der Quaternion  $\mathbf{S}_{\text{Obj}}=(\cos(90^\circ/2+\varepsilon\cdot 4/2), \sin(90^\circ/2+\varepsilon\cdot 4/2)\cdot(0-\varepsilon\cdot 3, 1, 0))$  in eine homogene  $4\times 4$ -Matrix führt unter Berücksichtigung von  $U=(u_x, u_y, u_z) = (-3, 4, 3)$  direkt zu der in Bild 1.2 enthaltenen Stellungsbeschreibung. Dies zeigt, daß die in Bild 1.1, Bild 1.2, Bild 1.4 und Bild 1.8 beschriebenen Stellungen unter der Voraussetzung  $U = (-3, 4, 3)^T$  identisch sind. Damit kann die oben angegebene Dualquaternion  $\mathbf{S}_{\text{Obj}}$  auch durch eine Transformation der Beschreibungswerte aus Bild 1.1 bzw. Bild 1.2 gewonnen werden. Entsprechend dem von uns beschriebenen Transformationsverfahren wird aus der in Bild 1.2 enthaltenen homogenen Matrix die zugehörige Eulerdarstellung ermittelt:

$$(-3, 4, 3, 90^\circ, 90^\circ, -90^\circ).$$



**Abb. 1.8:** Darstellung des Objektkoordinatensystems  $\mathbf{S}_{\text{Obj}}$  durch eine duale Quaternion

Ausgehend von diesen Werten erhalten wir nach Aufspaltung der dualen trigonometrischen Funktionen in der Verschiebungsquaternion das Quaternionenprodukt

$$(1, -\varepsilon\cdot\frac{3}{2}, \varepsilon\cdot 2, \varepsilon\cdot\frac{3}{2}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\begin{aligned} &= \left(1, -\varepsilon \cdot \frac{3}{2}, \varepsilon \cdot 2, \varepsilon \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \cdot \sqrt{2}, -\varepsilon \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \cdot \sqrt{2}, 0\right). \end{aligned}$$

## 2 Roboterkinematik

Folgende zwei grundlegende Fragestellungen treten in der Roboterkinematik auf:

- Vorwärtsrechnung:  
Hier wird bei gegebenen Gelenkeinstellungen die Effektorstellung bezüglich des festgelegten Bezugssystems berechnet.
- Rückwärtsrechnung:  
Hier werden die zur Erreichung einer vorgegebenen Effektorstellung notwendigen Gelenkeinstellungen ermittelt. Dazu wird im wesentlichen die aus der Vorwärtsrechnung bekannte Matrix der Effektorstellung mit der gewünschten Zielstellung gleichgesetzt und diese *kinematische Gleichung* nach den Gelenkvariablen aufgelöst; insofern ist die Vorwärtsrechnung Voraussetzung für die Rückwärtsrechnung.

Im allgemeinen führt die Rückwärtsrechnung auf die Lösung eines transzendenten Gleichungssystems, das bekanntlich nicht immer geschlossen lösbar ist. Im Gegensatz dazu gelingt die Vorwärtsrechnung jedoch für alle  $n$  Ketten, insbesondere für alle Roboterkonstruktionen.

Es werden deshalb zunächst die Vorwärtsrechnung und Ansätze zur Vereinfachung der Rückwärtsrechnung behandelt; anschließend werden Lösungsverfahren und Voraussetzungen beschrieben, die eine Rückwärtsrechnung explizite, d.h. geschlossene Lösung der kinematischen Gleichung erlauben. Diese Voraussetzungen geben auch dem Roboterkonstrukteur Entwurfskriterien an die Hand, um für die Rückwärtsrechnung optimal geeignete und damit leicht steuerbare Roboter zu entwickeln. Die im Kapitel 2.3 vorgestellten Lösungsverfahren zeichnen sich darüberhinaus dadurch aus, daß die zugehörigen Lösungsformeln für die Gelenkgleichungen aus Polynomen vom Grad  $\leq 2$  abgeleitet werden können. Wie aus der Mathematik bekannt ist [Meyberg 75, Meyberg 76], existieren natürlich prinzipiell auch geschlossene Lösungen, wenn die Polynome vom Grad  $\leq 4$  sind. Diese Einschränkung gegenüber mehr mathematisch geprägten Darstellungen [Pieper 69, Roth 76], bietet den Vorteil, daß aus diesen Lösungsfunktionen noch detaillierte Aussagen über das Gelenkverhalten getroffen werden können. Bei Polynomen vom Grad  $> 4$  muß ohnehin auf numerische Lösungsmethoden zurückgegriffen werden, was wir, abgesehen von Spezialfällen schon bei Polynomen vom Grad  $> 2$  empfehlen, da die geschlossene Lösung hier keine Vorteile mehr bietet. Als *ein* Beispiel für numerische Lösungsverfahren wird in Kapitel 2.6 die inkrementelle, ein auf iterativen Methoden basierendes differentielles, linearisiertes Verfahren zur Behandlung der Rückwärtsrechnung dargestellt.

## 2.1 Theorie der Vorwärtsrechnung

### 2.1.1 Prinzipielle Vorgehensweise

Um den Aufwand für die Vorwärtsrechnung zu verringern, ist es wünschenswert, eine für alle Roboter geeignete Berechnungsmethode zu wählen. Das von Denavit und Hartenberg [Denavit 55] entwickelte Verfahren (*D-H-Verfahren*) wird diesem Anspruch gerecht und bietet darüberhinaus noch den Vorteil, daß damit auch eine eindeutige Beschreibungsmöglichkeit für die kinematischen Aspekte der Robotermechanik geschaffen wurde.

Zur Erleichterung der Berechnung der Effektorstellung werden kartesische Rechtskoordinatensysteme als Zwischensysteme  $S_i$  in jedes Roboter Gelenk  $G_i$  gelegt und nur die relative Stellung des Systems  $S_{i+1}$  zum jeweiligen Vorgängersystem  $S_i$  ermittelt. Nach einer Verkettung dieser Gelenksysteme ergibt sich dann die Effektorstellung im zugrundegelegten Bezugssystem.

Durch die Einhaltung fester Regeln, der sogenannten *Denavit-Hartenberg-Regeln (D-H-Regeln)*, bei der Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme ist gewährleistet, daß jeder Übergang von einem Gelenk zum nächsten durch eine strukturell gleiche Transformation (z.B. in Form einer homogenen  $4 \times 4$ -Matrix) beschrieben werden kann. In dieser Transformation treten außer der Gelenkvariablen nur konstante, aus der mechanischen Konstruktion des Roboters resultierende Werte auf.

### 2.1.2 Beziehungen zwischen benachbarten Gelenken

#### Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme

Die im folgenden benutzten Bezeichnungen beziehen sich auf die Abb. 2.1.

Die Stellung der Gelenkkoordinatensysteme  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , wird durch die drei D-H-Regeln festgelegt:

1. Die Achse  $z_i$  des Systems  $S_i$  wird in die Bewegungsachse des Gelenks  $G_i$  gelegt. Ihre Richtung wird entsprechend der positiven Bewegungsrichtung des Gelenks  $G_i$  festgelegt.
2. Die Achse  $x_i$  wird durch die (nicht immer eindeutig bestimmte) gemeinsame Normale von  $z_{i-1}$  nach  $z_i$  definiert.
3. Die Achse  $y_i$  ist im Sinn eines kartesischen Rechtskoordinatensystems definiert durch  $y_i = z_i \times x_i$ .

Bemerkungen zur zweiten Regel:

- Das System  $S_0$  entspricht dem Basiskoordinatensystems BKS; die Achse  $z_0$  ist notwendig zur Bestimmung von  $x_1$ .

- Sind die Achsen  $z_{i-1}$  und  $z_i$  zueinander windschief, so wird durch die gemeinsame Normale sowohl die Achse  $x_i$  als auch der Ursprung  $U_i$  des Systems  $S_i$  eindeutig definiert. Der Ursprung  $U_i$  kann dann durchaus außerhalb des physikalischen Robotergelenks liegen.
- Schneiden sich die Achsen  $z_{i-1}$  und  $z_i$ , so ist der Ursprung  $U_i$  eindeutig definiert, die Richtung der Achse  $x_i$  (als Lot auf  $z_{i-1}$  und  $z_i$ ) ist jedoch innerhalb der zwei sich bietenden Möglichkeiten frei wählbar.
- Sind die Achsen  $z_{i-1}$  und  $z_i$  zueinander parallel, so ist die Achse  $x_i$  eindeutig definiert und der Ursprung  $U_i$  ist frei wählbar.
- Fallen die Achsen  $z_{i-1}$  und  $z_i$  zusammen (Identität mit Ausnahme der Richtung), so sind sowohl die Achse  $x_i$  als auch der Ursprung  $U_i$  frei wählbar.

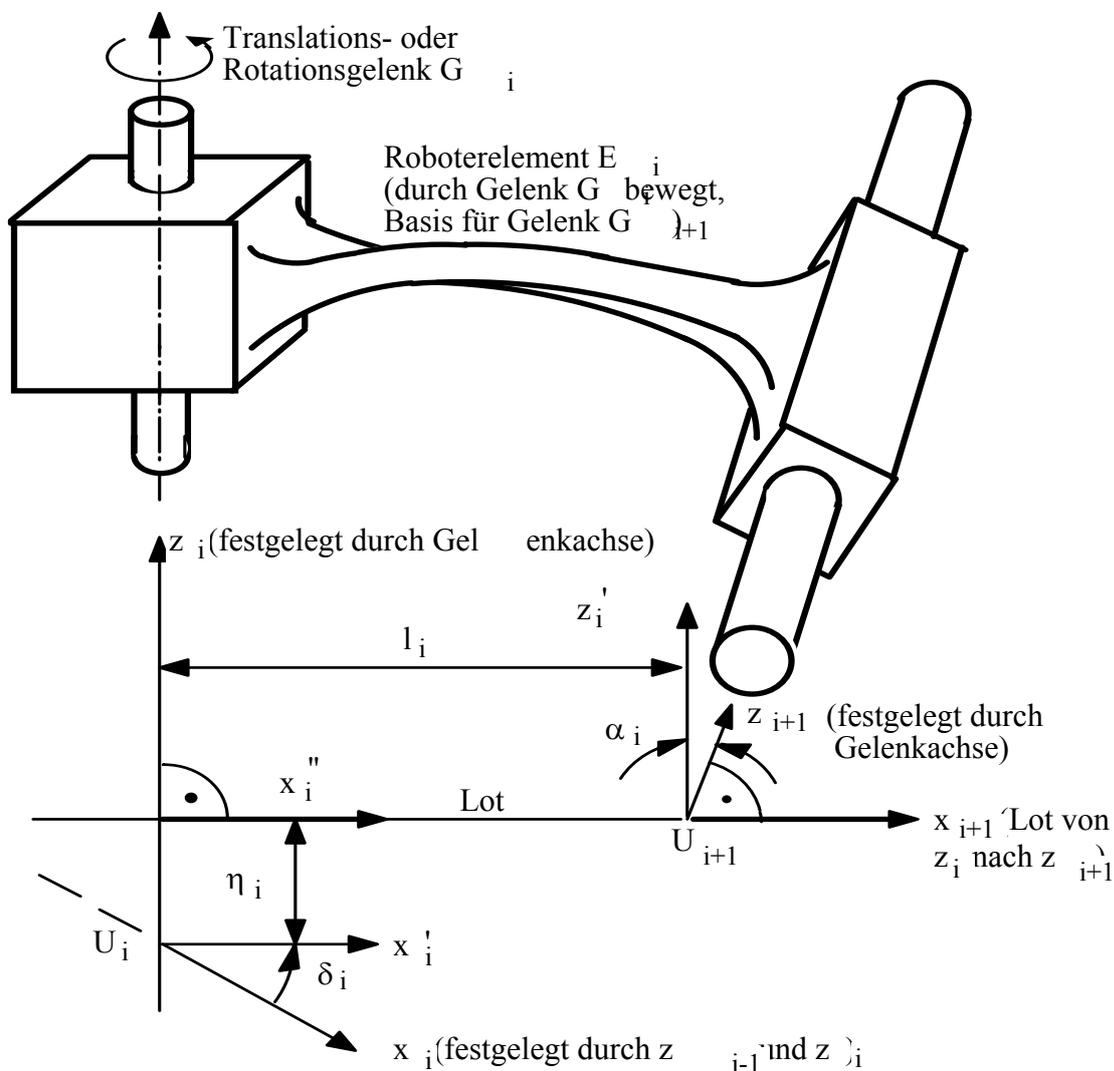


Abb. 2.1: Definition der Gelenkkoordinatensysteme

Das System  $S_i$  ist dem unbeweglichen Teil des Gelenks  $G_i$  körperfest zugeordnet, d.h.: System  $S_0 = \text{BKS}$  und System  $S_1$  sind statische Systeme (der Gelenkübergang von  $S_0$  nach

$S_1$  ist konstant und enthält keine Gelenkvariable), eine Bewegung des Gelenks  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , verändert alle Systeme  $S_j$ ,  $i < j \leq n$ , und das Effektorsystem  $S_E$ .

### Transformation zwischen benachbarten Gelenken

Durch die D-H-Regeln ist gewährleistet, daß das System  $S_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , mit vier elementaren Rotationen bzw. Translationen in das System  $S_{i+1}$  übergeführt werden kann, unabhängig davon, ob es sich bei dem zugehörigen Gelenk um ein Dreh- oder Schubgelenk handelt oder einen konstanten Übergang:

1. Rotation um die Achse  $\mathbf{z}_i$  mit  $\delta_i$ :  $\mathbf{x}_i$  geht über in  $\mathbf{x}_i'$ , das die Richtung von  $\mathbf{x}_{i+1}$  hat (kurz:  $\mathbf{R}(\mathbf{z}_i, \delta_i)$ )
 

$\delta_i$ : Winkel zwischen der Achse  $\mathbf{x}_i$  und der um die Achse  $\mathbf{z}_i$  im mathematisch positiven Sinn gedrehten Achse  $\mathbf{x}_{i+1}$
2. Translation entlang der Achse  $\mathbf{z}_i$  um  $\eta_i$ :  $\mathbf{x}_i'$  geht über in  $\mathbf{x}_i''$ , das auf der Lotgeraden von  $\mathbf{z}_i$  nach  $\mathbf{z}_{i+1}$  liegt (kurz:  $\mathbf{T}(\mathbf{z}_i, \eta_i)$ )
 

$\eta_i$ : Abstand des Schnittpunktes von Achse  $\mathbf{z}_i$  mit der Lotgeraden von  $\mathbf{z}_i$  nach  $\mathbf{z}_{i+1}$  vom Ursprung  $U_i$
3. Translation entlang der Achse  $\mathbf{x}_i''$  bzw.  $\mathbf{x}_{i+1}$  um  $l_i$ :  $\mathbf{x}_i''$  geht über in  $\mathbf{x}_{i+1}$ , der Ursprung  $U_{i+1}$  ist festgelegt als Schnittpunkt von  $\mathbf{z}_{i+1}$  mit dem Lot von  $\mathbf{z}_i$  nach  $\mathbf{z}_{i+1}$  (kurz:  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_i, l_i)$ )
 

$l_i$ : Länge der gemeinsamen Normalen der Achsen  $\mathbf{z}_i$  und  $\mathbf{z}_{i+1}$
4. Rotation um die Achse  $\mathbf{x}_{i+1}$  mit  $\alpha_i$ :  $\mathbf{z}_i'$  geht über in  $\mathbf{z}_{i+1}$  (kurz:  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \alpha_i)$ )
 

$\alpha_i$ : Winkel zwischen der Achse  $\mathbf{z}_i$  und der um die Achse  $\mathbf{x}_{i+1}$  im mathematisch positiven Sinn gedrehten Achse  $\mathbf{z}_{i+1}$

Die Auswirkungen dieser vier Transformationen lassen sich zu einer Stellungsangabe  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  zusammenfassen:

$$\mathbf{D}_{i,i+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1},$$

wobei  $\mathbf{Z}_i$  die Rotation (1.) und Translation (2.) bezüglich der z-Achse und  $\mathbf{X}_{i+1}$  die Translation (3.) und Rotation (4.) bezüglich der x-Achse wiedergibt.

### Darstellung als homogene 4×4-Matrizen

Als homogene 4×4-Matrizen haben  $\mathbf{Z}_i$  und  $\mathbf{X}_{i+1}$  folgende Form:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) & -\sin(\delta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\delta_i) & \cos(\delta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \eta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Wahl des Index "i+1" bei  $\mathbf{X}_{i+1}$  soll verdeutlichen, daß die Translation um  $l_i$  entlang der  $x_{i+1}$ -Achse und die Rotation um  $\alpha_i$  um die  $x_{i+1}$ -Achse erfolgen.

$$\text{Damit wird } \mathbf{D}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) & -\sin(\delta_i) \cdot \cos(\alpha_i) & \sin(\delta_i) \cdot \sin(\alpha_i) & l_i \cdot \cos(\delta_i) \\ \sin(\delta_i) & \cos(\delta_i) \cdot \cos(\alpha_i) & -\cos(\delta_i) \cdot \sin(\alpha_i) & l_i \cdot \sin(\delta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & \eta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Darstellung als duale 3×3-Matrizen

Als duale 3×3-Matrizen haben  $\mathbf{Z}_i$  und  $\mathbf{X}_{i+1}$  folgende Form:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) - \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \sin(\delta_i) & -\sin(\delta_i) - \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \cos(\delta_i) & 0 \\ \sin(\delta_i) + \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \cos(\delta_i) & \cos(\delta_i) - \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \sin(\delta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) - \varepsilon \cdot l_i \cdot \sin(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) - \varepsilon \cdot l_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) + \varepsilon \cdot l_i \cdot \cos(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) - \varepsilon \cdot l_i \cdot \sin(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

Werden Rotation  $\delta_i$  und Translation  $\eta_i$  zur n Zahl  $\delta\eta_i = \delta_i + \varepsilon \cdot \eta_i$  und  $\alpha_i$  und  $l_i$  zu  $\alpha l_i = \alpha_i + \varepsilon \cdot l_i$  zusammengefaßt, dann lassen sich obige Dualmatrizen vereinfacht und in völliger Analogie zum Rotationsanteil der homogenen 4×4-Darstellung aufschreiben als:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \cos(\delta\eta_i) & -\sin(\delta\eta_i) & 0 \\ \sin(\delta\eta_i) & \cos(\delta\eta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha l_i) & -\sin(\alpha l_i) \\ 0 & \sin(\alpha l_i) & \cos(\alpha l_i) \end{bmatrix}$$

Diese vereinfachte Schreibweise – die durch die Verwendung des Momentenvektors statt des Lotvektors möglich wird – darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß spätestens

dann, wenn eine Aussage über den Ursprung eines Objektkoordinatensystems gemacht werden soll, die dualen Zahlen in ihren Primär- und Sekundärteil aufgespalten werden müssen, so daß der Rechenaufwand hierdurch nicht reduziert wird.

### Darstellung als duale Quaternionen

Als duale qen haben  $\mathbf{Z}_i$  und  $\mathbf{X}_{i+1}$  unter Verwendung der dualen Zahlen  $\delta\eta_i$  und  $\alpha l_i$  folgende Form:

$$\mathbf{Z}_i = (\cos(\delta\eta_i/2), 0, 0, \sin(\delta\eta_i/2))^T$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = (\cos(\alpha l_i/2), \sin(\alpha l_i/2), 0, 0)^T$$

Für die Multiplikation  $\mathbf{D}_{i,i+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$  ergibt sich dann:

$$\mathbf{D}_{i,i+1} = (\cos(\delta\eta_i/2) \cdot \cos(\alpha l_i/2), \cos(\delta\eta_i/2) \cdot \sin(\alpha l_i/2), \sin(\delta\eta_i/2) \cdot \sin(\alpha l_i/2), \sin(\delta\eta_i/2) \cdot \cos(\alpha l_i/2))^T$$

### Unterscheidung von Dreh- und Schubgelenken

Wird nun die Matrix  $\mathbf{Z}_i$  speziell unter dem Gesichtspunkt der verschiedenen Gelenkarten (Dreh- und Schubgelenk) betrachtet, so zeigt sich folgender Unterschied:

- Bei Drehgelenken setzt sich der Drehwinkel  $\delta_i$  aus einem konstanten Winkel  $\vartheta_i$  und der *Gelenkvariablen*  $d_i$  zusammen:  $\delta_i = \vartheta_i + d_i$   
Der konstante Winkel  $\vartheta_i$  dient dazu, bezüglich der Nullstellungen der Gelenke die Achse  $\mathbf{x}_i$  in die Achse  $\mathbf{x}_{i+1}$  überzuführen.
- Bei Schubgelenken setzt sich die Translationsgröße  $\eta_i$  aus einem konstanten Wert  $h_i$  und der Gelenkvariablen  $t_i$  zusammen:  $\eta_i = h_i + t_i$   
 $h_i$  entspricht dem Abstand zwischen Ursprung  $U_i$  und dem Schnittpunkt der Achse  $\mathbf{z}_i$  mit der Normalen von  $\mathbf{z}_i$  nach  $\mathbf{z}_{i+1}$  bei Nullstellung des Gelenks  $G_i$ .

Die für die Matrix  $\mathbf{X}_{i+1}$  bestimmenden Größen  $l_i$  und  $\alpha_i$  sind immer Konstanten, die durch die Konstruktion des Roboters festgelegt sind.

Damit bezeichnet das Vierertupel  $(\vartheta_i + d_i, h_i, l_i, \alpha_i)$  den Übergang vom System  $S_i$  ins System  $S_{i+1}$  für ein Drehgelenk und  $(\vartheta_i, h_i + t_i, l_i, \alpha_i)$  den Übergang für ein Schubgelenk. Für  $(\delta_i, \eta_i, l_i, \alpha_i)$  wird von der Gelenkart im Zuge der mathematischen Bearbeitung abstrahiert; die zugehörige *allgemeine* (entweder  $d_i$  oder  $t_i$ ) wird mit  $v_i$  bezeichnet.

Die beiden aus den D-H-Regeln abgeleiteten Vierertupel  $(\vartheta_i + d_i, h_i, l_i, \alpha_i)$  und  $(\vartheta_i, h_i + t_i, l_i, \alpha_i)$  genügen zur eindeutigen Beschreibung von Robotern in der Roboterkinematik; im weiteren Verlauf werden deshalb Roboter mit  $n$  Gelenken durch die  $n$  zugehörigen Vierertupel (*D-H-Parameter*) charakterisiert.

### 2.1.3 Berechnung der Effektorstellung

Um nun die Effektorstellung im Basiskoordinatensystem BKS berechnen zu können, genügt es, die relativen Stellungsbeschreibungen  $\mathbf{D}_{i,i+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$  multiplikativ zu verknüpfen. Damit ist für die Berechnung der Effektorstellung im wesentlichen das Produkt  $\mathbf{P}$  der relativen Stellungsbeschreibungen von Interesse [Lee 82, Paul 81b]:

$$\mathbf{P} = \prod_{i=0}^n \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$$

Um eine für alle Roboterkonstruktionen und Effektorformen gültige Berechnungsmethode zu erhalten, muß das Produkt  $\mathbf{P}$  eventuell noch um einen konstanten Systemübergang  $\mathbf{TR}$  erweitert werden. Durch die oben beschriebene Transformation  $\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$  kann nur die Lage einer *Achse* (in unserem Fall der Achse  $\mathbf{z}_{i+1}$ ) eindeutig festgelegt werden. Das Erreichen eines exakt definierten Punktes auf der Achse  $\mathbf{z}_{i+1}$  als Ursprung  $U_{i+1}$  kann i.a. mit den D-H-Regeln nicht erzwungen werden. Dies wirft lediglich dann ein Problem auf, wenn das Effektorkoordinatensystem  $S_E$  nicht frei wählbar ist, sondern aus anwendungsbezogenen Gründen bereits festgelegt wurde. Um den Ursprung  $U_{n+1}$  des aus den D-H-Regeln resultierenden Systems  $S_{n+1}$  mit dem Ursprung  $U_E$  des Effektorsystems  $S_E$  in Deckung zu bringen, muß u.U. das System  $S_{n+1}$  um eine konstante Translation  $\mathbf{T}_E$  entlang der Achse  $\mathbf{z}_{n+1}$  verschoben werden.

Da die x-Achse des Effektorkoordinatensystems nicht als Normale auf  $\mathbf{z}_E$  und die letzte Gelenkachse  $\mathbf{z}_n$  definiert sein muß, kann es auch passieren, daß die Orientierung des Effektorkoordinatensystems  $S_E$  durch die letzte Transformationsmatrix  $\mathbf{D}_{n,n+1}$  nicht erreicht wird. Deshalb wird, ausgehend von der vorgegebenen Achse  $\mathbf{z}_E$ , ein zusätzliches Zwischensystem  $S_{n+1}$  entsprechend den D-H-Regeln definiert. Der Übergang von System  $S_n$  zum System  $S_{n+1}$  ist dann durch die Transformation  $\mathbf{Z}_n \cdot \mathbf{X}_{n+1}$  darstellbar und der Übergang vom System  $S_{n+1}$  zum System  $S_E$  läßt sich durch eine weitere, konstante Transformation erreichen, die aus der Translation  $\mathbf{T}_E$  entlang der Achse  $\mathbf{z}_E$  (=Achse  $\mathbf{z}_{n+1}$ ) und einer Rotation um die Achse  $\mathbf{z}_E$  besteht.

$$\mathbf{TR} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_E) & -\sin(\vartheta_E) & 0 & 0 \\ \sin(\vartheta_E) & \cos(\vartheta_E) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit  $h_E =$  Abstand zwischen Ursprung  $U_{n+1}$  und Ursprung  $U_E$   
 $\vartheta_E =$  Winkel zwischen der Achse  $\mathbf{x}_{n+1}$  und der Achse  $\mathbf{x}_E$

Auf die Darstellung der konstanten Transformationsmatrixkonstante - **TR** in Form einer dualen 3×3-Matrix und einer Dualquaternion wollen wir hier verzichten, da diese Umwandlung schon an mehreren Beispielen gezeigt wurde.

Die Effektorstellung, bezogen auf ein beliebig vorgegebenes Basiskoordinatensystem  $BKS = S_0$  und bei beliebig gewähltem Effektorkoordinatensystem  $S_E$ , ergibt sich dann durch die Multiplikation der aus den D-H-Parametern gewonnenen Übergangsbeschreibungen der Zwischensysteme  $S_i$  und der Transformation **TR** und kann als Funktion  $F$  der allgemeinen  $n$  Gelenkvariablen  $v_i$  verstanden werden:

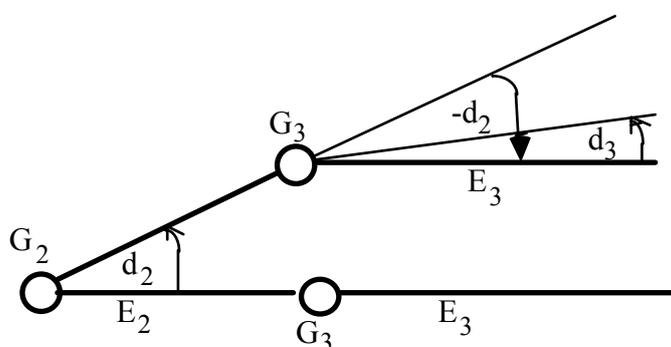
$${}^{BKS}\mathbf{Effektor} = \left( \prod_{i=0}^n (Z_i \cdot X_{i+1}) \right)$$

•  $\mathbf{TR} = F(v_1, \dots, v_n)$

### 2.1.4 Vereinfachungen und Sonderfälle bei der Vorwärtsrechnung

Sind zwei parallele Rotationsachsen des Roboters aufgrund der mechanischen Konstruktion unabhängig von den eingestellten Gelenkvariablen zueinander parallel, so lassen sich die Formeln für die Effektorstellung durch ein Zusammenfassen der Winkel  $\delta_i$  und  $\delta_j$  zu  $\delta_i \pm \delta_j$  bzw.  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  zu  $\alpha_i \pm \alpha_j$  verkürzen; bei gleichen Gelenkdrehrichtungen gilt der Plusoperator, bei entgegengesetzt drehenden Gelenken gilt Minus. Der eigentliche Vorteil dieser Vereinfachung zeigt sich erst bei der Rückwärtsrechnung, für die Vorwärtsrechnung werden dadurch in der Regel nur einige Multiplikationen und Additionen eingespart.

Häufig gibt es bei Robotern Sonderkonstruktionen, die als *statische Gelenke* bezeichnet werden. Bei der bisher geschilderten Betrachtungsweise verändert eine (Dreh-) Gelenkbewegung die Orientierung und die Position aller nachfolgenden Roboterelemente, die Nullstellung eines Robotergelenks ist im D-H-Verfahren daher immer bezüglich der aktuellen Lage des Vorgängerelements definiert. Verändert nun – bedingt durch die spezielle Mechanik des Roboters – ein Rotationsgelenk  $G_i$  die Orientierung eines (zur Rotationsachse nichtparallelen) Nachfolgerelements  $E_j$  nicht, so wird das Gelenk  $G_j$  als *statisch bezüglich des Gelenks  $G_i$*  bezeichnet. Dies muß durch eine Substitution der Gelenkvariablen  $d_j$  durch  $d_j \pm d_i$  im D-H-Verfahren berücksichtigt werden.



Eine Bewegung des Gelenks  $G_2$  läßt  $E_3$  in seiner Orientierung unverändert.

$$d_3 \rightarrow d_{3\text{Sub}} = d_3 - d_2 \text{ bei gleichgerichteten Gelenkachsen}$$

$$d_3 \rightarrow d_{3\text{Sub}} = d_3 + d_2 \text{ bei entgegengesetzten Gelenkachsen}$$

**Abb. 2.2:** Statische Gelenke

Für den häufigen Sonderfall statischer Gelenke, deren parallele Rotationsachsen zwangsläufig parallel sind, ergibt sich auch bei der Vorwärtsrechnung einen wesentlichen Vorteil. Durch die Substitution von  $d_j$  durch  $d_j \mp d_i$  und die Zusammenfassung von  $d_i$  und  $d_j$  zu  $d_{i \pm j}$  ergibt sich als Resultat der Winkel  $\pm d_j$  allein.

### 2.1.5 Optimale Null-Lagen der Robotergelenke

Prinzipiell sind die Null-Lagen der Robotergelenke und ihre positive Bewegungsrichtung frei wählbar. Erscheint es günstig, so können bei der Wahl der auch mechanisch unzulässige Gelenkstellungen gewählt werden. Dies hat lediglich zur Folge, daß eine solche Nullstellung des Gelenks im realen Betrieb nie angefahren werden kann.

Eine spezielle, für den Benutzer einprägsame Wahl der Null-Lagen ist nur dann notwendig, wenn der Roboter vorwiegend in Gelenkkordinaten angesteuert werden soll.

Soll die Steuerung jedoch in kartesischen Koordinaten erfolgen, dann ist es sinnvoll, durch eine geeignete Wahl der Null-Lagen im Zuge des D-H-Verfahrens den (Rechen-)Aufwand bei der Bestimmung der Transformationsmatrizen  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  zu vereinfachen. Dazu dient folgendes Verfahren:

1) Die Achse  $\mathbf{x}_1$  ist – als Normale von der Achse  $\mathbf{z}_0$  des Basiskoordinatensystems auf die Achse  $\mathbf{z}_1$  – definiert bzw. für  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1$  beliebig wählbar. Im zweiten Fall empfiehlt es sich, die Achse  $\mathbf{x}_1$  als Normale von der Achse  $\mathbf{z}_1$  zur Achse  $\mathbf{z}_2$  zu wählen. Dies hat zur Folge, daß bei einem Translationsgelenk  $G_1$  der Winkel  $\vartheta_1=0$  bzw. bei einem Rotationsgelenk  $G_1$  die Verschiebung  $h_1=0$  wird.

2a) Das Gelenk  $i$  sei ein Drehgelenk,  $1 \leq i \leq n$ :

Das Gelenk  $i$  wird in solch eine eventuell mechanisch nicht erreichbare Stellung gebracht, daß die Normale von der Achse  $\mathbf{z}_i$  zur Achse  $\mathbf{z}_{i+1}$  parallel und gleichgerichtet mit der Achse  $\mathbf{x}_i$  ist ( $\mathbf{x}_i$  ist definiert durch die Achsen  $\mathbf{z}_{i-1}$  und  $\mathbf{z}_i$ ).

Effekt: Statt bei jedem Systemübergang die Achse  $\mathbf{x}_i$  durch eine Drehung um  $\vartheta_i$  auf die Normale auszurichten, dreht man bei der Bestimmung der optimalen Null-Lage die Normale zur Achse  $\mathbf{x}_i$  hin, so daß der Winkel  $\vartheta_i = 0$  wird.

2b) Das Gelenk  $i$  sei ein Schubgelenk,  $1 \leq i \leq n$ :

Das Gelenk  $i$  wird in solch eine eventuell mechanisch nicht erreichbare Stellung gebracht, daß der Schnittpunkt der Achse  $\mathbf{z}_i$  mit der Normalen von der Achse  $\mathbf{z}_i$  zur Achse  $\mathbf{z}_{i+1}$  und der Koordinatenursprung  $U_i$  zusammenfallen.

Effekt: Die Verschiebung  $h_i$  wird Null.

- 2c) Bei Wahlfreiheit der Achse  $\mathbf{x}_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , d.h. falls die Achsen  $\mathbf{z}_i$  und  $\mathbf{z}_{i+1}$  parallel bzw. bis auf die Richtung identisch sind, kann beim Schubgelenk  $G_i$  eine beliebige Null-Lage gewählt werden, weil sich diese Festlegung durch die Wahlfreiheit der Achse  $\mathbf{x}_i$  ausgleichen läßt.
- 2d) Für ein Drehgelenk  $G_i$  ergibt sich die Wahlmöglichkeit nur bei Identität (bis auf die Richtung) der Achsen  $\mathbf{z}_i$  und  $\mathbf{z}_{i+1}$ .  
Analog zu Punkt 1) können auch hier durch geeignete Definition der Null-Lage von Gelenk  $G_i$  weitere Parameter zu Null gemacht werden.

Wird die zweite Regel für alle Gelenke  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , durchgeführt, so verschwinden die Konstanten  $\vartheta_i$  und  $h_i$  aus allen Transformationsmatrizen  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  und es ergeben sich die D-H-Parameter in ihrer :  $(d_i, h_i, l_i, \alpha_i)$  bzw.  $(\vartheta_i, t_i, l_i, \alpha_i)$ .

### 2.1.6 Beispiel: Berechnung der Effektorstellung des ASEA-IR B6 mit Knickhand

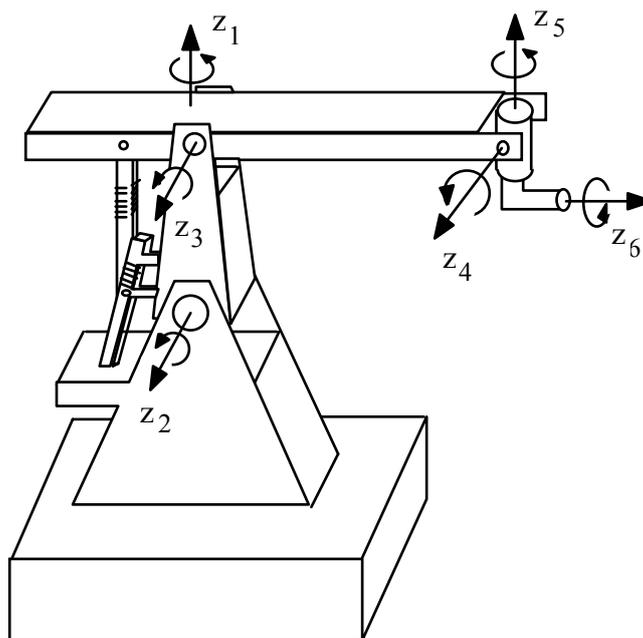


Abb. 2.3: Industrieroboter ASEA-IR B6

Die charakteristischen Werte des ASEA-IR B6 wurden aus [Heindl 83] entnommen.

Gelenk	$\delta_i$	$\eta_i$	$l_i$	$\alpha_i$
1	$d_1$	0	0	$90^\circ$
2	$d_2$	0	$L_1$	$0^\circ$
3	$d_3 (-d_2)$	0	$L_2$	$0^\circ$

4	$d_4 (-d_3)$	0	0	$-90^\circ$	
5	$d_5$	$-L_H$	0	$-90^\circ+k^\circ$	(Knickhand)
6	$d_6$	$-L_6$	0	$-90^\circ$	
TR	$-90^\circ$	$L_E$	0	$0^\circ$	

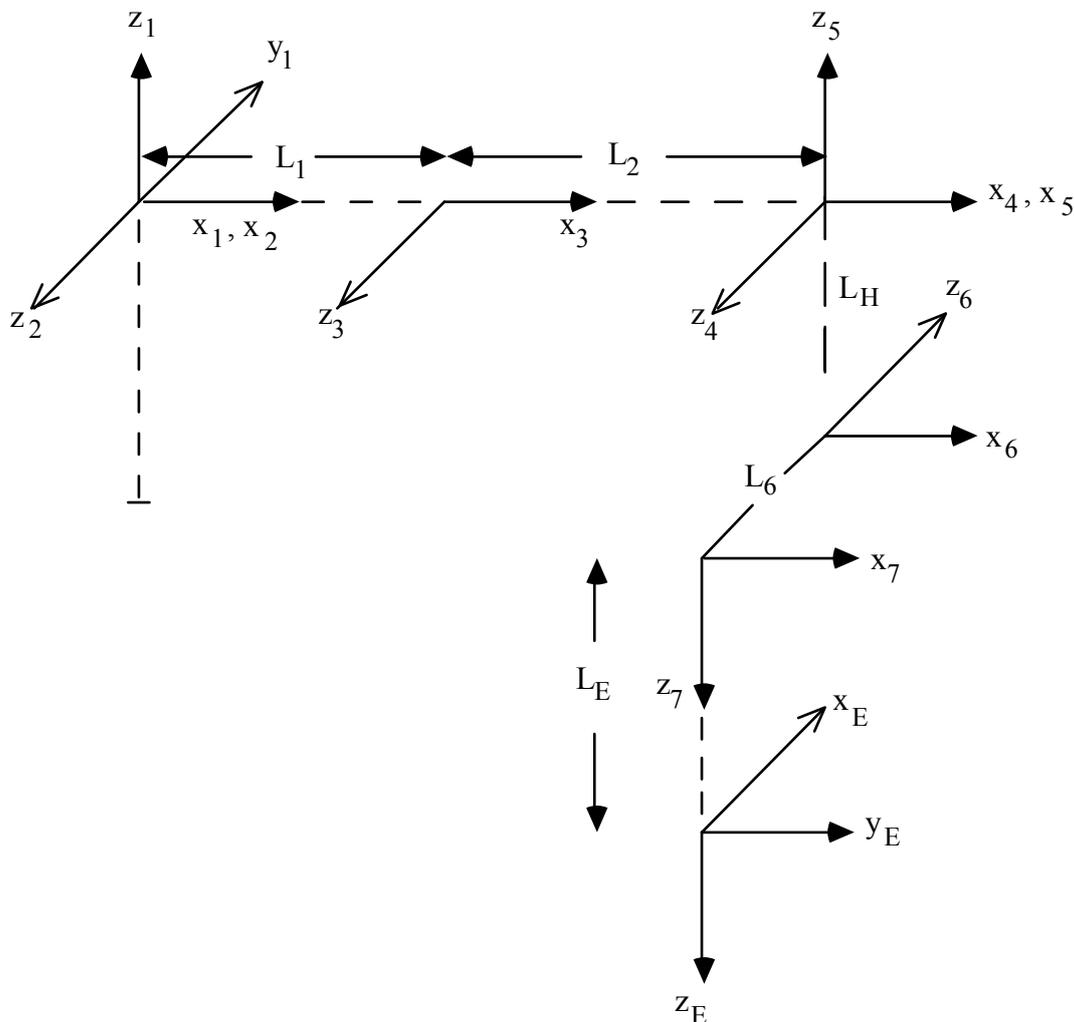


Abb. 2.4: Festlegung der Gelenkkoodinatensysteme des ASEA-IR B6 in optimaler Nullstellung

Bemerkungen:

- Die Gelenke 2 und 3 verändern die Orientierung der nachfolgenden Roboterelemente nicht, d.h. Gelenk 3 ist statisch bezüglich Gelenk 2 und Gelenk 4 ist statisch bezüglich Gelenk 3. Wie im Abschnitt 2.1.4 beschrieben, müssen deshalb die Variablen  $d_i$  der statischen Gelenke  $G_i$  beim D-H-Verfahren substituiert werden durch:

$$d_{3S} = d_3 - d_2$$

$$d_{4S} = d_4 - d_3 (= d_4 - d_{3S} - d_2)$$

Die Variablen  $d_3$  und  $d_4$  in der Tabelle der charakteristischen Werte werden durch die Variablen  $d_{3S}$  und  $d_{4S}$  ersetzt.

- Das Basiskoordinatensystem BKS wurde optimal gewählt:  
BKS =  $S_1$ , d.h. daß der Übergang  $\mathbf{Z}_0 \bullet \mathbf{X}_1$  verschwindet und  $h_1=0$  wird.

Die D-H-Parameter des ASEA-IR B6 ergeben unter Berücksichtigung der statischen Gelenke folgende Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{D}_{1,2} = \begin{bmatrix} \cos(d_1) & 0 & \sin(d_1) & 0 \\ \sin(d_1) & 0 & -\cos(d_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{2,3} = \begin{bmatrix} \cos(d_2) & -\sin(d_2) & 0 & L_1 \cdot \cos(d_2) \\ \sin(d_2) & \cos(d_2) & 0 & L_1 \cdot \sin(d_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{3,4} = \begin{bmatrix} \cos(d_3-d_2) & -\sin(d_3-d_2) & 0 & L_2 \cdot \cos(d_3-d_2) \\ \sin(d_3-d_2) & \cos(d_3-d_2) & 0 & L_2 \cdot \sin(d_3-d_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{4,5} = \begin{bmatrix} \cos(d_4-d_3) & 0 & -\sin(d_4-d_3) & 0 \\ \sin(d_4-d_3) & 0 & \cos(d_4-d_3) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{5,6} = \begin{bmatrix} \cos(d_5) & -\sin(d_5) \cdot \sin(k) & -\sin(d_5) \cdot \cos(k) & 0 \\ \sin(d_5) & \cos(d_5) \cdot \sin(k) & \cos(d_5) \cdot \cos(k) & 0 \\ 0 & -\cos(k) & \sin(k) & -L_H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{6,7} = \begin{bmatrix} \cos(d_6) & 0 & \sin(d_6) & 0 \\ \sin(d_6) & 0 & -\cos(d_6) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{TR} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für den ASEA-IR B6 folgende homogene 4×4-Matrix

$$\mathbf{M} = \prod_{i=0}^n \mathbf{D}_{i,i+1} \cdot \mathbf{TR}$$

als Beschreibung Berechnung der Effektorstellung:

$$M_{11} = -\cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k) - \sin(d_1) \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k) - \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(k)$$

$$M_{12} = \cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \cos(d_6) - \sin(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) + \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(d_6) \cdot \cos(k) - \sin(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \cos(d_6) + \cos(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k))$$

$$M_{13} = -\cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) + \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) + \sin(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k))$$

$$M_{14} = \cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (-L_E \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) + L_6 \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k)) - \sin(d_1) \cdot (-L_E \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) - L_6 \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k))$$

$$\begin{aligned}
& - \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot (-L_E \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) - L_6 \cdot \sin(k) - L_H) \\
& + \cos(d_1) \cdot (L_1 \cdot \cos(d_2) + L_2 \cdot \cos(d_3)) \\
M_{21} = & - \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k) + \cos(d_1) \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k) \\
& - \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(k) \\
M_{22} = & \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \cos(d_6) - \sin(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) \\
& + \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(d_6) \cdot \cos(k) \\
& + \cos(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \cos(d_6) + \cos(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) \\
M_{23} = & - \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\
& + \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) \\
& - \cos(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\
M_{24} = & \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (-L_E \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\
& + L_6 \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k)) \\
& - \cos(d_1) \cdot (L_E \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) + L_6 \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k)) \\
& + \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot (L_E \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) + L_6 \cdot \sin(k) + L_H) \\
& + \sin(d_1) \cdot (L_1 \cdot \cos(d_2) + L_2 \cdot \cos(d_3)) \\
M_{31} = & - \sin(d_4) \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k) + \cos(d_4) \cdot \sin(k) \\
M_{32} = & \sin(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \cos(d_6) - \sin(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) - \cos(d_4) \cdot \sin(d_6) \cdot \cos(k) \\
M_{33} = & - \sin(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) - \cos(d_4) \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) \\
M_{34} = & \sin(d_4) \cdot (-L_E \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) + L_6 \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k)) \\
& - \cos(d_4) \cdot (L_E \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) + L_6 \cdot \sin(k) + L_H) + L_1 \cdot \sin(d_2) + L_2 \cdot \sin(d_3)
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den Transformationsmatrizen  $\mathbf{Z}_i$  und  $\mathbf{X}_{i+1}$ , für die die duale Darstellungsform durch Einführung eines dualen Winkels direkt aus der homogenen 4x4-Matrix gewonnen werden konnte, funktioniert dieses Verfahren bei der hier vorliegenden Effektorstellung nicht mehr. In der Berechnung der Effektorstellung wurden bereits bei der Aufstellung der einzelnen Transformationsmatrizen  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  die Zahlenwerte für die Winkel  $\alpha_i$  eingesetzt, so daß  $\alpha_i$  formelmäßig nicht mehr in Erscheinung tritt. Aus dem Verschwinden der  $\alpha_i$  folgt aber nicht das Verschwinden der dualen Größe  $\alpha_i$ , wie das folgende Beispiel deutlich zeigt:

Sei  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha l = \alpha + \varepsilon \cdot l = 0^\circ + \varepsilon \cdot 15$

Wegen  $\alpha = 0^\circ$  verschwindet  $\sin(\alpha)$ , nicht jedoch  $\sin(\alpha l) = \sin(\alpha) + \varepsilon \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 0^\circ + \varepsilon \cdot 15$

Daher muß die Effektorstellung des ASEA-IR B6 in dualer Form explizit durch Multiplikation der einzelnen dualen 3x3-Transformationsmatrizen berechnet werden; analoges gilt für die Form in Dualquaternionen.

## 2.2 Grundlagen der Rückwärtsrechnung

Mit Hilfe der Vorwärtsrechnung wurde die Roboterfunktion  $F(v_1, \dots, v_n)$  ermittelt, die die Effektorstellung  ${}^{\text{BKS}}\mathbf{Effektor}$  bei vorgegebenen Gelenkvariablen  $v_i$  ermittelt. Sehr viel häufiger stellt sich die Frage, welche Werte die Gelenkvariablen  $v_i$  annehmen müssen, damit eine bestimmte Effektorstellung, im folgenden mit *Zielstellung*  ${}^{\text{BKS}}\mathbf{Ziel}$  bezeichnet, erreicht wird. Die Bestimmungsgleichung für die Gelenkvariablen  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , die sogenannte *kinematische Gleichung*, heißt also:

$$F(v_1, \dots, v_n) = \mathbf{D}_{0,1} \cdot \left( \prod_{i=1}^n (\mathbf{Z}_i(v_i) \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \right) \cdot \mathbf{TR} = \left( \prod_{i=0}^n (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \right) \cdot \mathbf{TR} = \mathbf{Ziel}$$

Die Aufgabe der Rückwärtsrechnung besteht nun genau in der Lösung dieser kinematischen Gleichung. Im Gegensatz zur Vorwärtsrechnung, die für alle Roboter nach einem fest vorgegebenen Algorithmus, dem D-H-Verfahren, durchgeführt werden kann, existiert für die Rückwärtsrechnung kein allgemeines Verfahren, mit dem für alle Roboter explizite Lösungsformeln für die Gelenkvariablen gewonnen werden können. Um überhaupt einen systematischen Zugang zur Lösung der kinematischen Gleichung zu finden, ist es sinnvoll, Vereinfachungen der kinematischen Gleichung vorzunehmen, sowie einige Sätze und Definitionen bereitzustellen.

### 2.2.1 Vereinfachungsmöglichkeiten für die Rückwärtsrechnung

Im Rahmen der Rückwärtsrechnung wird bei Drehgelenken statt dem Drehwinkel  $\delta_i$  nur die Variable  $d_i$  und bei Schubgelenken statt der Größe  $\eta_i$  nur die Variable  $t_i$  benutzt. Wurde die Null-Lage des betrachteten Roboters nicht optimal gewählt und treten deshalb neben den Gelenkvariablen noch die konstanten Werte  $\vartheta_i$  bzw.  $h_i$  auf, dann können *nach der Ermittlung* der Gelenkvariablen  $d_i$  bzw.  $t_i$  die Substitutionen "d<sub>i</sub> wird ersetzt durch d<sub>i</sub>+ $\vartheta_i$ " bzw. "t<sub>i</sub> wird ersetzt durch t<sub>i</sub>+ $h_i$ " vorgenommen werden.

Ebenso führt die bei der Vorwärtsrechnung schon erwähnte Möglichkeit, Variablen paralleler parallele Rotationsachsen zu einer Variablen zusammenfassen zu können (vgl. Abschnitt 2.1.4), zu einer Vereinfachung der kinematischen Gleichung.

Die kinematische Gleichung kann dadurch weiter vereinfacht werden, daß die konstanten Randoperanden  $\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{X}_1$  und  $\mathbf{X}_{n+1} \cdot \mathbf{TR}$  auf die rechte Gleichungsseite gebracht und mit der Zielstellung zusammengefaßt werden. Aufgrund der Kommutativität von Rotation und Translation bezüglich der *gleichen Achse* kann für die neuen Randoperanden  $\mathbf{Z}_1$  und  $\mathbf{Z}_n$  der konstante Translationsteil  $\mathbf{T}(z_i, h_i)$  bzw. Rotationsteil  $\mathbf{R}(z_i, \vartheta_i)$  für Rotations- bzw. Translationsgelenke nach außen gezogen, auf die rechte Gleichungsseite gebracht und ebenfalls mit der Zielstellung zusammengefaßt werden. Damit ergibt sich für die *Standardform der* eine modifizierte Zielstellung  $\mathbf{W}$ . Die verkürzte linke Gleichungsseite, die alle sechs zu bestimmenden Gelenkvariablen enthält, wird mit  $\mathbf{M}$  abgekürzt. Somit erhalten wir die *kinematische Grundgleichung*:  $\mathbf{M} = \mathbf{W}$

Betrachten wir als Beispiel die nicht abgekürzte Notation der kinematischen Grundgleichung für den Fall, daß  $G_1$  und  $G_n$  Rotationsgelenke sind:

$$\mathbf{R}_1(z_1, d_1) \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{R}_n(z_n, d_n) = (\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{T}_1(z_1, h_1))^{-1} \cdot \mathbf{Ziel} \cdot (\mathbf{T}_n(z_n, h_n) \cdot \mathbf{X}_{n+1} \cdot \mathbf{TR})^{-1}$$

Wir bezeichnen die so erhaltene kinematische Grundgleichung als einen *Ansatz* zur Lösung der kinematischen Gleichung. Weitere Ansätze zur Lösung der kinematischen Gleichung können dadurch gewonnen werden, daß weitere Randmatrizen auf die rechte Seite gebracht werden. Es kann zum Beispiel sinnvoll sein, nachdem bereits die Gelenkvariable  $v_1$  bestimmt wurde, die  $v_1$  enthaltende Matrix mit der bekannten Matrix  $\mathbf{W}$  auf der rechten Seite der Gleichung zusammenzufassen.

Diese durch Invertierung von Matrizen gewonnenen neuen Ansätze haben eine Veränderung von - und Zielsystem zur Folge. Das Bezugssystem ist also nicht mehr das Bezugskordinatensystem BKS, sondern das Koordinatensystem, auf das sich das linke Randkordinatensystem im neuen Ansatz bezieht. Ebenso ist das Zielsystem nicht mehr das Effektorkordinatensystem  $S_E$ , sondern das rechte Randkordinatensystem im neuen Ansatz.

Beispiel: In der obigen kinematischen Grundgleichung wäre also das für  $\mathbf{R}_1(z_1, d_1)$  zugrundeliegende Koordinatensystem das neue Bezugssystem und das durch  $\mathbf{R}_n(z_n, d_n)$  erreichte Koordinatensystem das neue Zielsystem.

Durch geeignete Umformung der kinematischen Grundgleichung sind wir also immer in der Lage, für beliebig vorgegebene Bezug- und Zielsysteme den zugehörigen Ansatz aufzustellen. Auf dieser Möglichkeit setzen im wesentlichen die in Kapitel 2.3 und 2.4 beschriebenen Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung auf.

## 2.2.2 Klassifikation von Roboterkonstruktionen und Zielvorgaben

Da kein für alle Roboter gültiges Verfahren zur Herleitung einer expliziten Lösung der kinematischen Gleichung existiert, wird in Kapitel 2.3 und 2.4 nach Klassifikationskriterien gesucht, die eine geeignete Klassenbildung bei Robotern und eine Zuordnung verschiedener expliziter Lösungsverfahren zu den einzelnen Klassen erlauben. Für diesen Zweck sind die folgenden Definitionen und Sätze nützlich.

### Definition: Roboter und Roboterklasse

Ein *Roboter* mit  $n$  Gelenken ist eindeutig definiert durch  $n$  Vierertupel  $(\delta_i, \eta_i, l_i, \alpha_i)$ , die jeweils die 4 Denavit-Hartenberg-Parameter des einzelnen Gelenkübergangs  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  enthalten.

Eine *Roboterklasse* besteht aus  $n$  Vierertupel  $(\delta_i, \eta_i, l_i, \alpha_i)$ , bei denen neben den Gelenkvariablen auch einige mechanische Konstanten (z.B.  $l_i$ ) parametrisiert sind. Für einen konkreten Roboter sind diese mechanischen Parameter natürlich mit festen Zahlenwerten belegt.

### **Definition: Globale und lokale Degeneration**

Eine Roboterkonstruktion heißt *global degeneriert*, wenn ihr Freiheitsgrad  $f < 6$  ist; eine *lokale* liegt genau dann vor, wenn sich der Freiheitsgrad  $f$  nur für gewisse Gelenkstellungen  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , auf  $f < 6$  verringert. Diese speziellen Gelenkstellungen heißen *Degeneration-sstellungen*.

Die Lösung der kinematischen Gleichung für global degenerierte Roboter ist wegen der geringen Anzahl der zu bestimmenden Gelenkvariablen leichter zu ermitteln. Die Einschränkung des Freiheitsgrades kann jedoch bei vielen Anwendungen die Benutzung eines global degenerierten Roboters unmöglich machen. Im weiteren werden global degenerierte Roboter nicht mehr betrachtet.

Roboter mit lokalen Degenerationsstellungen weisen diesen Nachteil nicht auf, da durch mechanische Gelenkbegrenzungen oder durch Maßnahmen in der Robotersteuerung alle Degenerationsstellungen vermieden werden können. Da jedoch in der Nähe einer lokalen Degenerationsstellung zwar der Freiheitsgrad  $f=6$  erhalten bleibt, aber der erreichbare Arbeitsraum stark schrumpft, stellt auch das Auftreten einer lokalen Degeneration einen konstruktiven Nachteil dar. Hier muß geprüft werden, ob dieser reduzierte Arbeitsraum noch einen sinnvollen Robotereinsatz ermöglicht; gegebenenfalls kann durch Vermeidung der Degenerationsstelle und ihrer näheren Umgebung wenigstens die Arbeitsraumtransparenz für den Anwender erhalten bleiben.

Insofern ist es wichtig, daß bei der Lösung der kinematischen Gleichung *alle Degenerationsstellungen* erfaßt werden.

### **Satz: Global degenerierte Roboterkonstruktionen**

Ein Roboter ist genau dann Roboterglobal degeneriert, wenn für die aus der kinematischen Gleichung zu berechnenden sechs Gelenkvariablen eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:

- a) Es existieren drei aufgrund der mechanischen Konstruktion komplanare Translationsgelenke.
- b) Mehr als drei Gelenke bewegen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in zueinander parallelen Ebenen.

- c) Es existieren vier Rotationsgelenke, deren Drehachsen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneiden.
- d) Es existieren zweimal drei Rotationsgelenke, deren Drehachsen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneiden (zwei Dreifach-Schnittpunkte);  
diese Konstruktion läßt sich durch folgende Roboterklasse beschreiben:  
 $(d_1, h_1, 0, \alpha_1) (d_2, 0, 0, \alpha_2) (d_3, h_3, l_3, \alpha_3) (d_4, h_4, 0, \alpha_4) (d_5, 0, 0, \alpha_5) (d_6, h_6, l_6, \alpha_6)$
- e) Die Rotationsachsen von zwei Rotationsgelenken fallen aufgrund der mechanischen Konstruktion zusammen. Dies können z.B. zwei direkt benachbarte Rotationsgelenke  $R_i$  und  $R_{i+1}$  mit  $l_i=0$  und  $\sin(\alpha_i)=0$  sein.
- f) Es existieren drei Rotationsgelenke, deren Drehachsen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneiden (Dreifach-Schnittpunkt), und die anderen drei Gelenke bewegen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in zueinander parallelen Ebenen.
- g) Zwei Translationsgelenke sind aufgrund der mechanischen Konstruktion zueinander parallel.
- h) Anzahl der Translationsgelenke + (Anzahl der aufgrund der mechanischen Konstruktion parallelen Rotationsgelenke -1) > 3

**Beweis:**

Zuerst wird gezeigt, daß jede der Bedingungen a) bis h) eine global degenerierte Roboterkonstruktion impliziert:

zu a) Drei komplanare Translationsgelenke verändern die Orientierung nicht und decken nur einen zweidimensionalen Positionsraum ab. Der dritte Freiheitsgrad für die Position und die drei Freiheitsgrade für die Orientierung können mit den restlichen drei Gelenken nicht verwirklicht werden. Es fehlt entweder ein Gelenk zur Positions- oder zur Orientierungseinstellung.

zu b) Bei  $n$  parallelen Rotationsgelenken kann die Orientierungsänderung immer durch eine Variable ausgedrückt werden (vgl. Abschnitt 2.2.1), d.h. es wird durch diese parallelen Rotationsgelenke genau ein Orientierungsfreiheitsgrad abgedeckt. Da die Gelenke parallel sind, kann hierdurch höchstens ein zweidimensionaler Positionsraum, also weitere zwei Positionsfreiheitsgrade erreicht werden. Mit  $n$  parallelen Rotationsgelenken kann deshalb maximal ein Freiheitsgrad  $f=3$  erreicht werden. Gibt es nun bei sechs Gelenken bereit  $n>3$  parallele Rotationsgelenke, so bleiben nur höchstens zwei Gelenke übrig, mit denen die restlichen drei Freiheitsgrade erreicht werden müßten. Da dies unmöglich ist, sind solche Roboterkonstruktionen global degeneriert.

zu c) Sei  $i$  die Position des ersten der vier sich schneidenden Rotationsgelenke in der kinematischen Kette, dann erzwingt der gemeinsame Schnittpunkt folgende D-H-Parameter für die vier Rotationsgelenke:

... $(d_i, h_i, 0, \alpha_i)$   $(d_{i+1}, 0, 0, \alpha_{i+1})$   $(d_{i+2}, 0, 0, \alpha_{i+2})$   $(d_{i+3}, h_{i+3}, l_{i+3}, \alpha_{i+3})$ ...

Die kinematische Gleichung  $\mathbf{D}_{0,1} \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_{n,n+1} \cdot \mathbf{TR} = \mathbf{Ziel}$  kann stets umgeformt werden zu folgendem Ansatz:

$$\mathbf{D}_{i,i+1} \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_{i+3,i+4} = \left( \prod_{j=0}^{i-1} \mathbf{D}_{j,j+1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{Ziel} \cdot \mathbf{TR}^{-1} \cdot \left( \prod_{j=i+4}^n \mathbf{D}_{j,j+1} \right)^{-1}$$

Eine Aufspaltung der Matrix  $\mathbf{D}_{i+3,i+4}$  in ihren variablen Rotationsanteil  $\mathbf{R}(\mathbf{z}_{i+3}, d_{i+3})$  und eine konstante Matrix  $\mathbf{D}_K(0, h_{i+3}, l_{i+3}, \alpha_{i+3})$  führt zu folgendem Ansatz:

$$\mathbf{D}_{i,i+1} \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_{i+2,i+3} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_{i+3}, d_{i+3}) = \left( \prod_{j=0}^{i-1} \mathbf{D}_{j,j+1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{Ziel} \cdot \mathbf{TR}^{-1} \cdot \left( \prod_{j=i+4}^n \mathbf{D}_{j,j+1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{D}_K^{-1}$$

Im Matrixprodukt der linken Gleichungsseite tritt in der vierten Spalte  $s_4 = (0, 0, h_i, 1)^T$  keine Variable auf, da die vier Rotationsgelenke sich im Ursprung des neuen Zielsystems schneiden und somit seine Position nicht verändern können. Auf der linken Gleichungsseite befinden sich vier Variablen, also kann auf der rechten Seite mit den zwei restlichen Gelenkvariablen nie der volle Positionsfreiheitsgrad  $f=3$  erreicht werden. Die Roboterkonstruktion ist global positionsdegeneriert.

Nebenbemerkung ohne Beweis: Bei Robotern mit dem Getriebefreiheitsgrad  $F > 6$  beseitigt die Festlegung der Gelenkvariablen von einem oder zwei der vier sich schneidenden Rotationsgelenke zwar die globale Degeneration, diese Gelenke haben jedoch – ähnlich wie die erste von zwei identischen Rotationsachsen – keine Auswirkung auf die Stellung eines Roboterelements und könnten deshalb durch starre Gelenkübergänge ersetzt werden.

zu d) Diese Roboterkonstruktion wird durch folgende D-H-Parameter beschrieben:

$$(d_1, h_1, 0, \alpha_1) (d_2, 0, 0, \alpha_2) (d_3, h_3, l_3, \alpha_3) (d_4, h_4, 0, \alpha_4) (d_5, 0, 0, \alpha_5) (d_6, h_6, l_6, \alpha_6)$$

Die zugehörige kinematische Gleichung kann in folgender Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{z}_1, d_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}_1, \alpha_1) \cdot \mathbf{D}_{2,3} \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_{4,5} &= \mathbf{T}(\mathbf{z}_1, h_1)^{-1} \cdot \mathbf{Ziel} \cdot \mathbf{TR}^{-1} \cdot (\mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7})^{-1} = \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{z}_1, h_1)^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_6, d_6))^{-1} \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz haben wir das Bezugssystem in den Schnittpunkt der ersten drei sich schneidenden Achsen und das Zielsystem in den Schnittpunkt der zweiten drei sich schneidenden Achsen gelegt. Damit ist klar, daß die Rotationsgelenkachsen durch den Ursprung des Zielsystems keinen Beitrag zur Positionsänderung des Zielsystems liefern können. Zur Untersuchung, welchen Beitrag die Rotationsgelenkachsen durch den Ursprung des Bezugssystems zur Positionsveränderung des Zielsystems liefern, betrachten wir den Abstand zwischen Bezug- und Zielsystem. Aus den Koordinaten des Ursprungs

$(u_x, u_y, u_z)$  des Zielsystems, die ja gerade in der vierten Spalte der homogenen  $4 \times 4$ -Matrix stehen, läßt sich der Abstand einfach als  $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$  berechnen. Betrachten wir der Einfachheit halber das Quadrat des Abstands, so erhalten wir aus obigem Ansatz folgende Abstandsgleichung:

$$h_3^2 + l_3^2 + h_4^2 + 2 \cdot h_3 \cdot h_4 \cdot \cos(\alpha_3) = W_{14}^2 + W_{24}^2 + (W_{34} - h_1)^2$$

Da dieser Ausdruck keine Variable enthält, deckt diese Roboterkonstruktion mit ihren Positionierungsmöglichkeiten nur eine Kugel mit dem Mittelpunkt  $(0, 0, h_1, 1)^T$  und dem Radius  $h_3^2 + l_3^2 + h_4^2 + 2 \cdot h_3 \cdot h_4 \cdot \cos(\alpha_3)$  ab und ist deshalb global positionsdegeneriert. Daß statt dessen für die Orientierung eine überflüssige Gelenkachse existiert, wird dadurch deutlich, daß die Verbindungselemente zwischen den beiden Schnittpunkten der drei sich schneidenden Achsen – wie ein gekröpfter Handbohrer – beliebig gedreht werden können, ohne daß dies eine Auswirkung auf den Effektor hat.

zu e) Fallen die beiden Drehachsen  $\mathbf{z}_{R_i}$  und  $\mathbf{z}_{R_{i+1}}$  zusammen (im Beispiel wegen  $l_i=0$  und  $\sin(\alpha_i)=0$ ), dann ist klar, daß mit  $R_i$  auch keine anderen Stellungsänderungen als mit  $R_{i+1}$  durchgeführt werden können. Deshalb ist eines der beiden Gelenke überflüssig und der Freiheitsgrad des Roboters verringert sich auf  $f \leq 5$ .

Analog zu Fall c) bietet sich auch bei Robotern mit einem Getriebefreiheitsgrad  $F > 6$  kein sinnvoller Einsatz eines solchen Gelenks an.

zu f) Seien  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  und  $\mathbf{R}_3$  die Transformationsmatrizen der drei sich schneidenden Rotationsgelenke. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  sollen das Produkt aus den Transformationsmatrizen der anderen drei Gelenke bzw. die Einheitsmatrix darstellen. Da parallele Translations- und Rotationsgelenke in ihrer Reihenfolge vertauscht werden dürfen (vgl. [Heiß 85]), ergibt sich dann folgender Ansatz für die kinematische Gleichung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Ziel}$$

Da sich die Gelenke mit den zugehörigen Transformationsmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  in parallelen Ebenen bewegen, muß entweder  $\mathbf{A}=\mathbf{E}$  oder  $\mathbf{C}=\mathbf{E}$  gelten (oder die Bedingung e ist für die Gelenke  $R_1$ ,  $R_2$  oder  $R_3$  erfüllt). Mit Hilfe des Spiegelungssatzes [Heiß 85] läßt sich zeigen, daß beide Varianten gleichwertig sind; damit kann sich der folgende Beweis auf die kinematische Gleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3 = \mathbf{Ziel}$  beschränken. Wird nun ein neues Bezugssystem  $\mathbf{B}$  mit seinen x- und y-Achsen in eine der parallelen Bewegungsebene gelegt und die kinematische Gleichung umgeformt in

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_{R_3}, d_{R_3}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Ziel} \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{z}_{R_3}, h_{R_3}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}_{R_3}, l_{R_3}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}_{R_3}, \alpha_{R_3}))^{-1},$$

dann treten weder auf der linken noch auf der rechten Seite des Ansatzes in der z-Komponente der Positionsspalte (Element 3.4) Gelenkvariablen auf: Das heißt, daß der Positionsfreiheitsgrad  $< 3$  und damit der Roboter global degeneriert ist.

zu g) Zwei aufgrund der mechanischen Konstruktion parallele Translationsgelenke besitzen nur den Positionsfreiheitsgrad  $f=1$ ; damit ist eines der Translationsgelenke überflüssig und der Freiheitsgrad des Roboters verringert sich auf  $f \leq 5$ .

zu h) Da  $n$  ( $n \leq 3$ , sonst Fall b) parallele Rotationsgelenke nur den Orientierungsfreiheitsgrad  $f=1$  haben (vgl. auch Beweis zu b), können folgende Fälle unterschieden werden:

Ein alleinstehendes, also "zu sich selber" paralleles Rotationsgelenk, mehr als drei Translationsgelenke: Durch mehr als drei Translationsgelenke kann nur  $f \leq 3$  erreicht werden. Damit stehen weniger als drei Rotationsgelenke zur Erreichung der drei Orientierungsfreiheitsgrade zur Verfügung.

Zwei parallele Rotationsgelenke, mehr als zwei Translationsgelenke: Durch zwei parallele Rotationsgelenke wird der Orientierungsfreiheitsgrad  $f=1$  erreicht. Damit steht höchstens noch ein Rotationsgelenk zur Erreichung der restlichen zwei Orientierungsfreiheitsgrade zur Verfügung.

Drei parallele Rotationsgelenke, mehr als ein Translationsgelenk: Durch das dritte parallele Rotationsgelenk wird ebenfalls nur der Orientierungsfreiheitsgrad  $f=1$  erreicht. Die Situation ist wie im vorigen Fall.

Alle drei Fälle führen also zu global degenerierten Roboterkonstruktionen.

Zu beweisen ist noch die Implikation, daß jede global degenerierte Roboterkonstruktion mindestens eine der Eigenschaften a) bis h) aufweist. Der Nachweis erfolgt durch Widerspruchsannahme; es wird gezeigt, daß die Bedingung " $\neg(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f \vee g \vee h)$ " immer zu Konstruktionen mit dem Freiheitsgrad 6 führt und dies bedeutet, daß sowohl der Positionsfreiheitsgrad 3 als auch der Orientierungsfreiheitsgrad 3 erreicht wird.

Aus  $\neg h$  folgt, daß mindestens drei orientierungsändernde Rotationsgelenke existieren, der Orientierungsfreiheitsgrad  $f=3$  wird erreicht.

Nachweis des Positionsfreiheitsgrades  $f=3$ :

Hier bietet sich eine Unterteilung nach der Anzahl der in der Konstruktion enthaltenen Translationsgelenke an:

- drei Translationsgelenke (mehr sind wegen  $\neg h$  nicht möglich):  
 $\neg a$  garantiert den vollen Positionsfreiheitsgrad  $f=3$ .
- zwei Translationsgelenke:  
 $\neg g$  verhindert eine Degeneration zwischen den beiden Translationsgelenken und  $\neg c$  garantiert mindestens ein positionsänderndes Rotationsgelenk; dieses neben den zwei Translationsgelenken noch benötigte positionsändernde Rotationsgelenk darf nicht senkrecht auf beiden Translationsachsen stehen, da der Positionsraum sonst zu einer Ebene degeneriert.

Folgende Situationen sind kritisch:

- drei sich schneidende Rotationsgelenke, denn dadurch wird das positionsändernde vierte Rotationsgelenk eindeutig festgelegt:  $\neg f$  garantiert den Positionsfreiheitsgrad  $f=3$ .
- zwei zueinander parallele Rotationsgelenke (mehr gibt es wegen  $\neg h$  nicht!): Das erste parallele Rotationsgelenk muß zur Positionseinstellung verwendet werden,  $\neg b$  und  $\neg e$  garantieren den Positionsfreiheitsgrad  $f=3$ .
- ein Translationsgelenk:
  - $\neg c$  garantiert mindestens zwei positionsändernde Rotationsgelenke und  $\neg e$  verhindert den Ausfall einer für die Positionseinstellung eingesetzten Rotationsachse; damit ist der Positionsfreiheitsgrad  $f=2$  sichergestellt und der volle Positionsfreiheitsgrad  $f=3$  wird nur dann nicht erreicht, wenn sich alle zur Positionseinstellung befähigten Gelenke in parallelen Ebenen bewegen. Dies wird durch die Bedingungen  $\neg b$  und  $\neg f$  unterbunden.
- kein Translationsgelenk:
  - $\neg c$  garantiert mindestens drei positionsändernde Rotationsgelenke und  $\neg e$  verhindert den Ausfall einer für die Positionseinstellung eingesetzten Rotationsachse; damit ist der Positionsfreiheitsgrad  $f=2$  sichergestellt und der volle Positionsfreiheitsgrad  $f=3$  wird nur dann nicht erreicht, wenn sich alle zur Positionseinstellung befähigten Rotationsgelenke in parallelen Ebenen bewegen oder sich dauernd in einem Punkt schneiden (zweiter Dreifach-Schnittpunkt). Im zweiten Fall reduziert sich der Positionsraum auf eine Kugeloberfläche.  $\neg b$ ,  $\neg f$  und  $\neg d$  verhindern diese Degenerationen.

### Definition: Klassifikation von Effektorstellungen

- Eine vorgegebene heißt *mehrdeutig*, wenn sich mehr als ein  $n$ -Tupel von Werten für die Gelenkvariablen finden läßt, durch das der Effektor in die gewünschte Stellung gebracht werden kann.  
Bei Robotern mit dem Freiheitsgrad  $f=6$  ist jede Effektorstellung mehrdeutig, da die Effektororientierung durch mindestens zwei verschiedene Sechstupel von Werten für die Gelenkvariablen eingestellt werden kann (vgl. dazu Abschnitt 1.2.2). Durch die Einbeziehung des mechanisch zulässigen Bewegungsumfanges der einzelnen Gelenke wird die Lösung u.U. eindeutig.
- Eine vorgegebene Effektorstellung wird als *Reduktionsstellung* bezeichnet, wenn bei der zugrundeliegenden Roboterkonstruktion zum Erreichen dieser Stellung ein Getriebefreiheitsgrad  $F < 6$  genügen würde. In dieser Situation können bestimmte Gelenkvariablen  $v_i$  beliebig gewählt werden, da mit Hilfe der restlichen Gelenke diese Effektorstellung trotzdem erreichbar ist. Die Rückwärtsrechnung reduziert sich nach der freien Festlegung von  $v_i$  auf die Berechnung der restlichen Gelenkvariablen.
- Effektorstellungen, die von einem nichtdegenerierten Roboter auch bei idealisierten Bewegungsmöglichkeiten der Gelenke ( $t_i \in ]-\infty, +\infty[$  bzw.  $d_i \in [0^\circ, 360^\circ[$ ) nicht

angesteuert werden können, werden Effektorstellungen *unerreichbar*, Effektorstellungen, die nur wegen des begrenzten Bewegungsumfanges der Gelenke nicht anfahrbar sind, werden Effektorstellungen *unzulässig* genannt. Unzulässig sind auch solche Roboterstellungen, bei denen ein Robotererelement, der Effektor oder ein mit dem Effektor verbundenes Objekt aus dem zulässigen Arbeitsraum herausragen (z.B. Kollision des Effektors mit dem eigenen Robotergehäuse oder mit im Arbeitsbereich befindlichen Hindernissen).

Unerreichbare Stellungen lassen sich bei der Berechnung der  $v_i$  erkennen. Wir kommen hierauf im nächsten Abschnitt zurück.

Unzulässige Stellungen fallen dagegen bei der mathematischen Berechnung der  $v_i$  nicht auf und müssen durch zusätzliche Algorithmen abgeprüft werden.

### 2.2.3 Vorüberlegungen zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung

Aus der Algebra ist bekannt, daß für allgemeine Polynome  $p$  in einer Unbekannten mit Grad  $p \leq 4$  eine explizite Lösung existiert [Meyberg 75, Meyberg 76] und diese Lösung als geschlossene Formel angegeben werden kann. Die bei der Rückwärtsrechnung auftretenden transzendenten Gleichungen lassen sich in Polynome mit einer oder mehreren Unbekannten (Gelenkvariablen) umwandeln. Damit die kinematische Gleichung also überhaupt geschlossen gelöst werden kann, müssen wir Ansätze finden, die als Bestimmungsgleichungen Polynome  $p$  in *einer* noch nicht bestimmten Unbekannten mit Grad  $p \leq 4$  liefern.

Aus Gründen der Praktikabilität beschränken wir uns vorerst auf solche Bestimmungsgleichungen, in denen nur Polynome in einer noch nicht bestimmten Unbekannten von Grad  $p \leq 2$  auftreten. Die hieraus ableitbaren Lösungsformeln für die Gelenkvariablen sind übersichtlich und bezüglich der zu analysierenden Sonderfälle der lokalen Degeneration und unerreichbarer Effektorstellungen einfach handhabbar.

Bei der Untersuchung, für welche Roboterklassen mit diesem Ansatz geschlossene Lösungen gefunden werden können, wird sich zeigen, daß die überwiegende Mehrzahl aller heute am Markt befindlichen Roboter hierzu gehört.

Zuerst stellt sich die Frage, wie die in Sinus- und Cosinusfunktionen auftretenden Gelenkvariablen den Grad des Lösungspolynoms beeinflussen. Hierzu greifen wir auf die auch in der Integralrechnung benutzte Tangenssubstitution  $x = \tan(d/2)$  zurück. Mit den Beziehungen

$$\sin(d) = 2 \cdot \tan(d/2) / (1 + \tan^2(d/2)) = 2 \cdot x / (1 + x^2) \quad \text{und}$$

$$\cos(d) = (1 - \tan^2(d/2)) / (1 + \tan^2(d/2)) = (1 - x^2) / (1 + x^2)$$

erhalten wir als Bestimmungsgleichungen Polynome in  $x$ . Offensichtlich ist jede Rotationsvariable  $d$  Anlaß für einen quadratischen Term in  $x$ . Dies bedeutet, daß eine explizite Lösung aus einem Polynom zweiten Grades nur dann existiert, wenn die transzendente Bestimmungsgleichung genau eine noch unbestimmte Rotationsvariable  $d$  enthält.

Im folgenden betrachten wir alle möglichen Formen transzendenter Bestimmungsgleichungen, die obiger Bedingung (nur eine Unbekannte) genügen und geben dazu die Lösung an.

### Eindeutige Lösung:

$$\text{Geg: } \sin(d_i)=a \text{ und } \cos(d_i)=b \Rightarrow d_i = \text{ATAN2}(a,b)$$

### Mehrdeutige Lösungen:

a) Geg:  $\sin(d_i)=a$  und es existiert keine Gleichung  $\cos(d_i)=b$

$$\text{Es gilt: } \cos(d_i) = \pm \sqrt{1-\sin^2(d_i)}$$

$$\Rightarrow d_{i1} = \text{ATAN2}(a, +\sqrt{1-a^2}); \quad d_{i2} = \text{ATAN2}(a, -\sqrt{1-a^2})$$

b) Geg:  $\cos(d_i)=a$  und es existiert keine Gleichung  $\sin(d_i)=b$

$$\text{Es gilt: } \sin(d_i) = \pm \sqrt{1-\cos^2(d_i)}$$

$$\Rightarrow d_{i1} = \text{ATAN2}(+\sqrt{1-a^2}, a); \quad d_{i2} = \text{ATAN2}(-\sqrt{1-a^2}, a)$$

c) Geg:  $a \cdot \sin(d_i) - b \cdot \cos(d_i) = 0$  mit  $a \neq 0, b \neq 0$

$$\text{Es gilt: } \frac{\sin(d_i)}{\cos(d_i)} = \frac{b}{a} = \frac{-b}{-a} \Rightarrow d_{i1} = \text{ATAN2}(b, a); \quad d_{i2} = \text{ATAN2}(-b, -a)$$

d) Geg:  $a \cdot \sin(d_i) - b \cdot \cos(d_i) = c$  mit  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Mit der Substitution  $a = r \cdot \cos(\varphi); b = r \cdot \sin(\varphi); r > 0$

$$\text{gilt: } r = +\sqrt{a^2+b^2} \quad \varphi = \text{ATAN2}(b, a)$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) \cdot \sin(d_i) - \sin(\varphi) \cdot \cos(d_i) = c/r$$

$$\sin(d_i - \varphi) = c/r$$

$$\cos(d_i - \varphi) = \pm \sqrt{1 - c^2/r^2}$$

$$d_{i1} = \text{ATAN2}(c, +\sqrt{a^2+b^2-c^2}) + \text{ATAN2}(b, a)$$

$$d_{i2} = \text{ATAN2}(c, -\sqrt{a^2+b^2-c^2}) + \text{ATAN2}(b, a)$$

Diese Bestimmungsgleichungen liefern Werte im Bereich  $d_{ij} \in ]-\pi, 3 \cdot \pi[$

### Diskussion der Lösungen:

1. Falls ein Radikand negativ ist (möglich bei a), b), d) ), liegt eine unerreichbare Zielvorgabe vor.
2. Die Fälle a), b) und c) sind Spezialfälle von Fall d). Bei der Durchführung der Berechnung hat dies jedoch einen unnötig hohen Rechenaufwand zur Folge.
3. Beim Auftreten mehrdeutiger Lösungen ist es empfehlenswert, zu prüfen, ob diese Mehrdeutigkeit aufgrund der Gelenkkonstruktion plausibel ist. Häufig werden geeignete Gleichungen übersehen, was die Ursache für falsche Ergebnisse ist.

1. Beispiel: Die Gleichung  $\sin(d_i)=a$  impliziert zwei Möglichkeiten

a) Für  $d_i$  existieren wirklich zwei Lösungen.

b)  $\cos(d_i)=b$  wurde übersehen; damit ist eine der zwei berechneten Lösungen falsch.

2. Beispiel: Die Gleichungen  $\cos(d_i)-\sin(d_i)=0$  und  $\cos(d_i)+\sin(d_i)=2a$  führen zu  $\sin(d_i)=a$  und  $\cos(d_i)=a$ , d.h. es existiert eine eindeutige Lösung für  $d_i$ .

Übersieht man die Existenz einer der beiden Gleichungen, so führt das zu falschen Ergebnissen.

4. In den Radikanden der Lösungsformeln stehen Ausdrücke, die Null werden können (Fall a, b und d). In diesen Fällen sind die Lösungen für  $d_{i1}$  und  $d_{i2}$  identisch. Fall c liefert immer zwei unterschiedliche Lösungen.

## 2.2.4 Auswahl nichtredundanter Bestimmungsgleichungen

### Analyse der Anzahl nichtredundanter Bestimmungsgleichungen

Da die Mehrzahl der Verfahren zur expliziten Lösung Redundanz der kinematischen Gleichung auf der Basis homogener  $4 \times 4$ -Matrizen entwickelt wurden, wird diese Darstellungsform im folgenden verwendet.

Die kinematische Gleichung in Form einer homogene  $4 \times 4$ -Matrizengleichung liefert vier triviale Einzelgleichungen der Form  $0=0$  bzw.  $1=1$  und 12 nichttriviale Einzelgleichungen  $f_{ij}(v_1, \dots, v_n) = \text{Ziel}_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 4$ ,  $n = \text{Anzahl der Gelenke}$ .

Da die ersten drei Spalten dieser Matrizen die drei Einheitsvektoren  $x$ ,  $y$  und  $z$  eines kartesischen Rechtskoordinatensystems beschreiben, unterliegen diese Matrixelemente den Orthonormalbedingungen:

$$\sum_{k=1}^3 f_{ki} \cdot f_{kj} = \sum_{k=1}^3 \text{Ziel}_{ki} \cdot \text{Ziel}_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i=j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Aus dem einen Teil dieser Bedingung

$$f_{1j}^2 + f_{2j}^2 + f_{3j}^2 = \text{Ziel}_{1j}^2 + \text{Ziel}_{2j}^2 + \text{Ziel}_{3j}^2 = 1 \quad \text{für } 1 \leq j \leq 3$$

folgt, daß alle  $n$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  aus  $\mathcal{R}^n$  zur Lösungsmenge dieser Gleichung gehören.

$L_i$  sei die Lösung für die Einzelgleichung  $f_{ij} = \text{Ziel}_{ij}$  (bei festem  $j$ ),  $1 \leq i, j \leq 3$ ;  $k, l, m$  seien disjunkte Werte aus  $\{1, 2, 3\}$ ;  $L_{k,l}$  sei  $L_k \cap \Omega_{\varepsilon\gamma\varepsilon\nu} \cap \Lambda_m \supset L_{k,l+}$  (dies gilt, weil  $f_{mj} = \text{Ziel}_{mj}$  für  $L_{k,l+}$ ) bringt eine über die Aufspaltung von  $L_{k,l}$  hinausgehende Bearbeitung der dritten Spaltengleichung  $f_{mj} = \text{Ziel}_{mj}$  keine Einschränkung der Lösung  $L_{k,l+}$  und damit auch keine Erkenntnis über die noch gesuchten Variablen. Die Aufspaltung von  $L_{k,l}$  trennt somit nur die für die kinematische Gleichung korrekten Lösungen  $L_{k,l+}$  (mit  $f_{mj} = \text{Ziel}_{mj}$ ) von den fehlerhaften Lösungen  $L_{k,l-}$ , für die wegen  $f_{mj} \neq \text{Ziel}_{mj}$  ein Element der  $j$ -ten Spalte zur Ungleichheit " $\|(\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{TR} \neq \mathbf{Ziel}$ " führt. Auf diese Weise haben wir die ersten drei redundanten Bestimmungsgleichungen ausgesondert.

Analog zur obigen Beweisführung scheidet wegen des anderen Teils der Orthonormalbedingung

$$\sum_{k=1}^3 f_{ki} \cdot f_{kj} = \sum_{k=1}^3 \text{Ziel}_{ki} \cdot \text{Ziel}_{kj} = 0 \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad i < j$$

jeweils eine Matrixgleichung  $f_{ij} = \text{Ziel}_{ij}$  für die Bestimmung der gesuchten Variablen aus, sodaß neben den drei Positionsgleichungen von den neun existierenden Orientierungsgleichungen nur drei zur Bestimmung der Variablen  $d_i$  verwendet werden können.

Dieses Ergebnis deckt sich mit der in Kapitel 1.1 gemachten Aussage, daß ein im Raum frei beweglicher Körper den Freiheitsgrad  $f=6$  besitzt, und zeigt, daß aus der kinematischen Gleichung (in welcher Darstellungsform auch immer) maximal sechs Gelenkvariable bestimmt werden können.

Daher können bei einem Roboter mit einem Getriebefreiheitsgrad  $F$ , der größer ist als der Freiheitsgrad  $f$  des Roboters,  $F-f$  Variable  $v_i$  aus der kinematischen Gleichung berechnet werden. Die Bestimmung der restlichen  $F-f$  Variablen muß mit Hilfe aufgabenspezifischer Kriterien durchgeführt werden.

### Auswahl der Bestimmungsgleichung

Ebenfalls auf die Orthonormalbedingungen wird die Beweisführung für den folgenden Satz über die homogenen  $4 \times 4$ -Matrix  $\mathbf{M}$  zurückgeführt:

Sind die Elemente  $M_{14}$ ,  $M_{24}$ ,  $M_{34}$ ,  $M_{31}$ ,  $M_{32}$ ,  $M_{33}$ ,  $M_{23}$  und  $M_{13}$  einer homogenen  $4 \times 4$ -Matrix  $\mathbf{M}$  bekannt und gilt  $|M_{33}| \neq 1$ , dann sind die restlichen 4 nichttrivialen Elemente  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  und  $M_{22}$  eindeutig bestimmt durch:

$$M_{11} = (-M_{31} \cdot M_{33} \cdot M_{13} - M_{32} \cdot M_{23}) / (1 - M_{33}^2)$$

$$M_{12} = (-M_{32} \cdot M_{33} \cdot M_{13} + M_{31} \cdot M_{23}) / ((1 - M_{33}^2))$$

$$M_{21} = (-M_{31} \cdot M_{33} \cdot M_{23} + M_{32} \cdot M_{13}) / (1 - M_{33}^2)$$

$$M_{22} = (-M_{32} \cdot M_{33} \cdot M_{23} - M_{31} \cdot M_{13}) / (1 - M_{33}^2)$$

### Beweis

Wegen  $|M_{33}| \neq 1$  ist  $M_{13} \neq 0$  oder  $M_{23} \neq 0$ . Sei  $M_{13} \neq 0$ :

Mit der Orthogonalitätsbedingung  $M_{12} \cdot M_{13} + M_{22} \cdot M_{23} + M_{32} \cdot M_{33} = 0$  ergibt sich

$$M_{12} = (-M_{22} \cdot M_{23} - M_{32} \cdot M_{33}) / M_{13}$$

Aus  $M_{12}^2 + M_{22}^2 + M_{32}^2 = 1$  folgt nach Einsetzen von  $M_{12}$  und Anwendung der quadratischen Lösungsformel unter Verwendung der Gleichungen

$$M_{31}^2 + M_{32}^2 + M_{33}^2 = 1 \text{ und } M_{13}^2 + M_{23}^2 + M_{33}^2 = 1:$$

$$M_{22} = (-M_{32} \cdot M_{33} \cdot M_{23} \pm M_{31} \cdot M_{13}) / (1 - M_{33}^2)$$

Da die Matrix  $\mathbf{M}$  ein Rechtskoordinatensystem beschreibt, muß mit  $\mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{z}$  gelten:

$$M_{31} = M_{12} \cdot M_{23} - M_{22} \cdot M_{13}$$

Diese Gleichung ist nur für die "-"-Variante in  $M_{22}$  erfüllbar!

Einsetzen von  $M_{22}$  in  $M_{12}$  und Anwenden der Gleichung  $M_{13}^2 + M_{23}^2 + M_{33}^2 = 1$  bringt  $M_{12}$  in die gewünschte Form.

Auf gleiche Weise werden  $M_{21}$  und  $M_{11}$  unter Verwendung von  $M_{11}^2 + M_{21}^2 + M_{31}^2 = 1$  und  $\mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{x}$  hergeleitet.

Für  $M_{13} = 0$  und  $M_{23} \neq 0$  verläuft der Beweis analog!

Dieser Satz ist notwendig zum Nachweis, daß *alle* Einzelgleichungen der kinematischen Matrixgleichung korrekt erfüllt sind, auch wenn zur Bestimmung der Lösung nur die oben genannte Teilmenge von Einzelgleichungen benutzt wurde. Die Auswahl der fünf Elemente  $M_{31}$ ,  $M_{32}$ ,  $M_{33}$ ,  $M_{23}$  und  $M_{13}$  aus dem  $3 \times 3$ -Orientierungsteil der Matrix  $\mathbf{M}$  ist dabei eine von mehreren Möglichkeiten. Allerdings erweist sich diese Wahl der dritten Zeile und der dritten Spalte (z-Zeile und z-Spalte) im Zusammenhang mit den Denavit-Hartenberg-Regeln für die Rückwärtsrechnung als besonders günstig, weil die z-Achse des Gelenksystems  $S_i$  die Bewegungsachse des jeweiligen Gelenks darstellt. Den Vorteil dieser Wahl werden wir im nächsten Kapitel noch deutlich feststellen können.

## 2.3 Ein Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung zweiten Grades

Wir haben bereits in Abschnitt 2.2.3 erläutert, warum die kinematische Gleichung zweiten Grades eine besonders wichtige Bedeutung für die Rückwärtsrechnung hat. Das hier angegebene Verfahren [Heiß 85] erlaubt für eine große Zahl von Roboterklassen Aussagen, mit welchen Ansätzen die kinematische Gleichung systematisch gelöst werden kann. Diese Ansätze beruhen auf geometrischen Überlegungen, die zu einer geeigneten Wahl der Bezug- und Zielsysteme in der kinematischen Gleichung und damit zu einfachen Bestimmungsgleichungen für die Gelenkvariablen führen. In diesem Verfahren werden zur Beschreibung der Gelenkstellungen homogene  $4 \times 4$ -Matrizen verwendet.

### 2.3.1 Charakterisierung der Robotergelenke

Eine Grundvoraussetzung für die Entwicklung des folgenden expliziten Lösungsverfahrens ist die Zuordnung kinematischer Eigenschaften zu den jeweiligen Gelenktypen. Ein heißt *positionsändernd*, wenn das Zielsystem des zugrundegelegten Ansatzes durch eine Gelenkbewegung in seiner Position, und *Robotergelenkorientierungsändernd*, wenn es in seiner Orientierung verändert wird. Insbesondere das Attribut *positionsändernd* ist bei Rotationsgelenken von der Wahl des Zielsystems abhängig.

#### Allgemeines Translationsgelenk

Da die Translationsvariable  $t_i$  nur auf der Position 3.4 in der zugehörigen Transformationsmatrix  $Z_i$  erscheint, tritt sie auch nach beliebig vielen Matrixmultiplikationen mit anderen Transformationsmatrizen  $Z_j$  und  $X_j$  immer nur in der vierten Spalte der Ergebnismatrix und nie multiplikativ verknüpft mit einer anderen Translationsvariablen auf. Damit sind also Translationsgelenke immer *positionsändernd* und nie *orientierungsändernd*.

#### Parallele Rotationsgelenke

Wie in Abschnitt 2.1.4 schon erwähnt, können die  $p$  Variablen von  $p$  aufgrund der mechanischen Konstruktion parallelen Rotationsgelenken in der Matrix  $M$  zu einer einzigen Variablen  $d_p = d_1 \pm d_2 \pm \dots$  zusammengefaßt werden. Der Orientierungsteil weist nur noch die Variable  $d_p$  auf. Somit haben bis auf das letzte Rotationsgelenk alle  $p-1$  Gelenke ihre orientierungsändernde Wirkung verloren.

Mit  $l_i \neq 0$  besitzt aber jedes dieser  $p$  parallelen Rotationsgelenke noch einen *positionsändernden* Effekt; d.h.: die in der kinematischen Kette ersten  $p-1$  parallelen Rotationsgelenke sind nur *positionsändernd* und das letzte Rotationsgelenk ist sowohl *positionsändernd* als auch *orientierungsändernd* (bezüglich der *positionsändernden* Eigenschaft ist auch der nächste Absatz zu beachten).

### Rotationsgelenk mit Drehachse im Ursprung des Zielsystems

Dieses Rotationsgelenk besitzt zwar eine orientierungsändernde Wirkung auf das Zielsystem, jedoch keinen positionsändernden Effekt, da eine Drehung um diese Gelenkachse den Ursprung des Zielsystems nicht bewegt.

#### Allgemeines Rotationsgelenk

Ein allgemeines Rotationsgelenk, das nicht die Voraussetzungen der beiden vorigen Absätze erfüllt, ist sowohl positionsändernd als auch orientierungsändernd. Dies läßt sich leicht aus der Transformationsmatrix  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  erkennen, da die Gelenkvariable  $d_i$  sowohl im Orientierungs- als auch im Positionsteil der Matrix auftritt.

### 2.3.2 Orientierungsbetrachtung

Bei diesem Verfahren wird die Möglichkeit bei parallelen Rotationsgelenken ausgenutzt, die Gelenkvariablen zusammenzufassen, so daß nur das letzte Gelenk in der kinematischen Kette sowohl positions- als auch orientierungsändernd ist.

Für Roboterkonstruktionen mit drei orientierungsändernden Gelenken kann immer eine geschlossene Lösungsformel für diese drei Gelenkvariablen abgeleitet werden, indem ein Ansatz zugrundegelegt wird, bei dem die z-Achse des Bezugssystems und die z-Achse des Zielsystems mit jeweils einer Rotationsachse eines der drei orientierungsändernden Gelenken zusammenfallen. Die Variable des dritten orientierungsändernden Gelenks kann dann explizit berechnet werden. In Abhängigkeit von diesem Ergebnis lassen sich auch für die anderen zwei Variablen geschlossene Lösungen ermitteln.

Bezeichnen wir die Transformationsmatrizen der drei orientierungsändernden Gelenke mit  $\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1}$ ,  $\mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2}$  und  $\mathbf{Z}_{R3} \cdot \mathbf{X}_{R3}$ , ohne daß durch die Wahl der Indizes damit festgelegt sein soll, daß diese Gelenke in der kinematischen Kette unmittelbar aufeinander folgen. Bezeichnen wir weiterhin mit  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  Produkte der restlichen Transformationsmatrizen aus  $\mathbf{M}$ , die keine Orientierungsänderung bewirken. Dann können wir die kinematische Gleichung in folgender Form angeben:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} \cdot \mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{W}$$

Der Ansatz

$$\mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D})^{-1}$$

genügt dann beispielsweise den im vorigen Absatz gestellten Forderungen.

Dies erlaubt über die Einzelgleichung 3.3 die Bestimmung der Variablen  $d_{R1}$ , weil einerseits das Rotationsgelenk R2 aufgrund der Identität von Rotationsachse  $\mathbf{z}_{R2}$  und z-Achse des Bezugssystems die z-Werte des Zielsystems, d.h. die dritte Zeile der Matrixgleichung, nicht verändert. Andererseits verändert das Rotationsgelenk R3 aufgrund der Identität von

Rotationsachse  $\mathbf{z}_{R3}$  und z-Achse des Zielsystems den z-Vektor des Zielsystems, d.h. die dritte Spalte der Matrixgleichung, nicht. Damit tritt in der Gleichung 3.3 weder die Variable  $d_{R2}$  noch die Variable  $d_{R3}$  auf. Die Variable  $d_{R1}$  kann als einzige in 3.3 auftretende orientierungsändernde Variable berechnet werden.

Formen wir den obigen Ansatz noch etwas um

$$\mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} = (\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D})^{-1}$$

und benutzen  $\mathbf{K}$  als Abkürzung für das Matrixprodukt  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D})^{-1}$ , dann hat die Gleichung 3.3 folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha_{R2}) \cdot C_{23} + \cos(\alpha_{R2}) \cdot C_{33} = \\ & = \cos(d_{R1}) \cdot \{B_{13} \cdot K_{13} + (B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})) \cdot K_{23}\} \\ & + \sin(d_{R1}) \cdot \{B_{13} \cdot K_{23} - (B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})) \cdot K_{13}\} \\ & + (B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})) \cdot K_{33} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Variablen  $d_{R1}$  aus 3.3 können sich folgende drei Fälle ergeben:

**Fall 1:** Die Variable  $d_{R1}$  verschwindet aus 3.3, falls gleichzeitig gilt:

1.  $B_{13}=0$
2.  $B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})=0$

In diesem Fall ist die Roboterkonstruktion global (orientierungs-)degeneriert, da die Rotationsachse  $\mathbf{z}_{R1}$  parallel zur Rotationsachse  $\mathbf{z}_{R2}$  ist und damit das Rotationsgelenk R1 keinen zusätzlichen Orientierungsfreiheitsgrad bringt (vgl. Abschnitt 2.3.1). Mit den zwei verbleibenden Orientierungsgelenken R2 und R3 läßt sich aber nicht der volle Orientierungsfreiheitsgrad drei erreichen.

Nachweis der Parallelität von  $\mathbf{z}_{R1}$  und  $\mathbf{z}_{R2}$ :

Die dritte Spalte des Matrizenprodukts  $\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B}$  beschreibt die Orientierung der Achse  $\mathbf{z}_{R2}$ , bezogen auf das System  $S_{R1}$ . Für  ${}^{S_{R1}}\mathbf{z}_{R2}$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^{S_{R1}}\mathbf{z}_{R2} &= \begin{bmatrix} \cos(d_{R1}) & -\sin(d_{R1}) & 0 & 0 \\ \sin(d_{R1}) & \cos(d_{R1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{R1} \\ 0 & \cos(\alpha_{R1}) & -\sin(\alpha_{R1}) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_{R1}) & \cos(\alpha_{R1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(d_{R1}) & -\sin(d_{R1}) & 0 & 0 \\ \sin(d_{R1}) & \cos(d_{R1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1}) \\ B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Voraussetzungen von Fall 1 und unter Rückgriff auf die Normiertheit der dritten Spalte von  $\mathbf{B}$  läßt sich die Spaltenbeschreibung von  $\mathbf{z}_{R2}$  weiter vereinfachen zu

$${}^{S_{R1}}\mathbf{z}_{R2} = \begin{bmatrix} \cos(d_{R1}) & -\sin(d_{R1}) & 0 & 0 \\ \sin(d_{R1}) & \cos(d_{R1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dies zeigt, daß  $\mathbf{z}_{R2}$  parallel zur Achse  $\mathbf{z}_{R1}$  ist.

**Fall 2:** Sei  $a = B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})$ , dann verschwindet die Variable  $d_{R1}$  aus 3.3, falls gleichzeitig gilt:

1.  $B_{13} \cdot K_{13} + a \cdot K_{23} = 0$
2.  $B_{13} \cdot K_{23} - a \cdot K_{13} = 0$
3. die Bedingungen von Fall 1 sind nicht erfüllt, d.h.  $a \neq 0$  oder  $B_{13} \neq 0$ .

Geometrische Interpretation der Bedingungen:

Aus den obigen Bedingungen folgt  $K_{13} = 0$  und  $K_{23} = 0$  und damit  $K_{33} = \pm 1$ .

Die dritte Spalte von  $\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3}$  beschreibt die Achse  $\mathbf{z}_{R3}$  in Bezug zum System  $S_{R1}$  und aus dem Ansatz  $\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} = \mathbf{K}$  ist mit  $K_{13} = 0$ ,  $K_{23} = 0$  und  $K_{33} = \pm 1$  ersichtlich, daß die Achse  $\mathbf{z}_{R3}$  parallel zur Achse  $\mathbf{z}_{R1}$  ist.

Da wegen der Parallelität der Rotationsachsen  $\mathbf{z}_{R1}$  und  $\mathbf{z}_{R3}$  eine Reduktionsstellung vorliegt, ist die Variable  $d_{R1}$  beliebig wählbar, sofern der verbleibende Teil der Einzelgleichung 3.3

$$\sin(\alpha_{R2}) \cdot C_{23} + \cos(\alpha_{R2}) \cdot C_{33} = \pm (B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})) \quad (\text{jetzt ohne Variablen!})$$

für den vorgegebenen Zielwert  $\mathbf{W}$  korrekt erfüllt ist (Beweis siehe [Heiß 85]); andernfalls ist die gewünschte Orientierung nicht einstellbar, d.h. die Zielstellung  $\mathbf{W}$  ist Effektorstellungunerreichbar.

Es läßt sich zeigen [Heiß 85], daß bei Robotern, die drei aufgrund der mechanischen Konstruktion Rotationsgelenke besitzen ( $\mathbf{z}_{R1}$  senkrecht zu  $\mathbf{z}_{R2}$ ,  $\mathbf{z}_{R2}$  senkrecht zu  $\mathbf{z}_{R3}$ ), die Gleichung 3.3 immer korrekt erfüllt ist. Damit kann jede gewünschte Orientierung des Effektors erreicht werden, wobei natürlich unzulässige Stellungen ausgenommen sind.

Der Fall 2 unterscheidet sich mechanisch gesehen von Fall 1 dadurch, daß nichtbenachbarte Orientierungsgelenke zueinander parallel sind im Gegensatz zu den benachbarten Orientierungsgelenken R1 und R2 in Fall 1.

**Fall 3:** In 3.3 ist entweder der Faktor von  $\cos(d_{R1})$  oder der Faktor von  $\sin(d_{R1})$  ungleich Null. In diesem Fall erhalten wir zwei Lösungen für  $d_{R1}$  entsprechend der in Abschnitt

2.2.3 angegebenen Formeln. Ein negativer Radikand bei der Berechnung von  $d_{R1}$  zeigt, daß die in der Zielstellung  $\mathbf{W}$  angegebene Orientierung für die vorliegende Roboterkonstruktion Effektorstellungunerreichbar ist. Analog zu Fall 2 wird durch orthogonale Orientierungsgelenke die Erreichbarkeit aller möglichen Orientierungen garantiert.

### **Berechnung der Variablen $d_{R2}$ und $d_{R3}$**

Mit vorgegebenem  $d_{R1}$ -Wert können aus den beiden Gleichungen 1.3 und 2.3 folgende Bestimmungsgleichungen für  $d_{R2}$  ermittelt werden:

$$\sin(d_{R2}) = a \quad \cos(d_{R2}) = b$$

Damit erhalten wir eine Lösung für  $d_{R2}$ :

$$d_{R2} = \text{ATAN2}(a,b)$$

Die Situation, daß sämtliche  $d_{R2}$ -Terme aus den Gleichungen 1.3 und 2.3 verschwinden, kann nur bei Parallelität der Achsen  $\mathbf{z}_{R2}$  und  $\mathbf{z}_{R3}$  auftreten. Dies entspricht einer globalen (Orientierungs-) Degeneration.

Ebenso erhalten wir aus den Gleichungen 3.1 und 3.2 folgende Bestimmungsgleichungen für  $d_{R3}$ :

$$\sin(d_{R3}) = c \quad \cos(d_{R3}) = d$$

Damit ergibt sich als Lösung für  $d_{R3}$ :

$$d_{R3} = \text{ATAN2}(c,d)$$

### **Anmerkung zur Korrektheit der Lösung für $d_{R2}$ und $d_{R3}$**

Ist die Gleichung 3.3 korrekt erfüllt, dann sind die aus 1.3 und 2.3 bzw. 3.1 und 3.2 berechneten Lösung für  $d_{R2}$  bzw.  $d_{R3}$  ebenfalls korrekt (vgl. [Heiß 85]). Es genügt also bei der Bestimmung der Orientierungsvariablen die Analyse der ersten aus 3.3 zu ermittelnden Variablen  $d_{R1}$ , um Aussagen über Degeneration, Reduktion oder Unerreichbarkeit treffen zu können.

Abschließend muß noch gezeigt werden, daß mit den ermittelten Lösungen für die Orientierungsvariablen  $d_{R1}$ ,  $d_{R2}$  und  $d_{R3}$  alle 9 Orientierungsgleichungen des zugrundeliegenden Ansatzes erfüllt sind. Dieser Nachweis wird unter Rückgriff auf den Satz über die vollständige Bestimmtheit einer homogenen  $4 \times 4$ -Matrix erbracht:

Die Gleichungen 1.3, 2.3, 3.3, 3.1 und 3.2 sind für alle nichtdegenerierten Roboter und alle erreichbaren Zielstellungen  $\mathbf{W}$  korrekt erfüllt, da aus diesen Gleichungen die Variablen  $d_{R1}$ ,  $d_{R2}$  und  $d_{R3}$  berechnet wurden. Um den Satz anwenden und damit die korrekte Erfüllung aller 9 Orientierungsgleichungen nachweisen zu können, muß lediglich noch gezeigt werden, daß  $|3.3links| \neq 1$  bzw.  $|3.3rechts| \neq 1$  gilt.

Die Widerspruchsannahme  $|3.3links|=|3.3rechts|=1$  entspricht einer globalen, da in diesem Fall  $\mathbf{z}_{R2}$  parallel zu  $\mathbf{z}_{R3}$  ist. Damit sind alle neun Orientierungsgleichungen mit  $d_{R1}$ ,  $d_{R2}$  und  $d_{R3}$  korrekt erfüllt.

### Berechnung der restlichen Variablen

Die Berechnung der restlichen Variablen erfolgt mit Hilfe der in den beiden folgenden Abschnitten beschriebenen Verfahren. Hierbei werden die übriggebliebenen Einzelgleichungen 1.4, 2.4 und 3.4 benutzt, was einer Betrachtung der Positionsspalte entspricht.

### Bemerkung zur Degeneration und Reduktion:

Während eine Degeneration gewisse Stellungen im Arbeitsraum von der Erreichbarkeit durch den Roboter ausschließt, ist dies bei Reduktionsstellungen keineswegs der Fall. Da unterschiedliche Konsequenzen aus dem Vorliegen einer (auch lokalen) Degeneration und dem Auftreten einer Reduktionsstellung gezogen werden müssen, kommt der Unterscheidung zwischen Degeneration und Reduktion eine erhebliche Bedeutung zu. Deshalb werden im folgenden ihre Erscheinungsformen zusammengestellt und am Beispiel der Orientierungsbetrachtung erläutert.

Die allgemeine Form einer Bestimmungsgleichung lautet  $a \cdot \sin(d) - b \cdot \cos(d) = c$  für eine Rotationsvariable  $d$  (im Beispiel:  $d_{R1}$ ) und  $a \cdot t^2 + b \cdot t = c$  für eine Translationsvariable  $t$ . Gilt nun in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Zielstellung – genauer gesagt abhängig von einer Teilmenge  $M_1$  der numerischen Werte  $W_{ij}$  der Zielstellung bzw. der schon berechneten Gelenkvariablen  $v_k$  –

$$a(w_1, \dots, w_m) = 0 \text{ und } b(w_1, \dots, w_m) = 0, \quad w_l \in M_1 = \{\dots, W_{ij}, \dots, v_k, \dots\}, \quad 1 \leq l \leq m$$

dann verschwindet die zu berechnende Gelenkvariable  $v$  aus der Bestimmungsgleichung. Folgende Fälle müssen hierbei unterschieden werden:

#### 1. Reduktionsstellung:

$c$  ist konstant oder nur von  $w_c \in M$ ,  $M$  Teilmenge von  $M_1$ , abhängig und es gilt:  $c(\dots, w_c, \dots) = 0$ .

Damit ist diese Bestimmungsgleichung auch beim Verschwinden der Variablen  $v$  korrekt erfüllt; verschwindet wegen  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$  die Variable  $v$  nicht, dann existiert eine Lösung für die Gelenkvariable  $v$ , die sicherstellt, daß die Bestimmungsgleichung korrekt erfüllt ist.

#### 2. Unerreichbare :

$c$  ist konstant oder nur von  $w_c \in M$ ,  $M$  Teilmenge von  $M_1$ , abhängig und es gilt:  $c(\dots, w_c, \dots) \neq 0$ .

Damit ist die Bestimmungsgleichung für die durch  $w_l \in M_1$  definierte Reduktionsstellung nicht korrekt erfüllt (Unerreichbarkeitskriterium).

Eine unerreichbare Reduktionsstellung liegt auch dann vor, wenn  $c$  neben  $w_c \in M$  noch von weiteren numerischen Werten  $W_{mn} \notin M_1$  oder schon berechneten Gelenkvariablen  $v_1 \notin M_1$  abhängt, aber *für alle möglichen* Werte von  $W_{mn}$  und  $v_1$  gilt:

$$c(\dots, w_c, \dots, W_{mn}, \dots, v_1, \dots) \neq 0.$$

Bei der Berechnung der Variablen  $d_{R1}$  in der Orientierungsbetrachtung wurde Fall 2 als Reduktionsstellung bezeichnet. Mit den Bedingungen 1, 2 und 3 von Fall 2 läßt sich jedoch zeigen, daß  $K_{13} = K_{23} = 0$  ist und damit wegen der Orthonormalität  $K_{33} = \pm 1$  sein muß. Je nachdem, ob der konstante, verbleibende Teil

$$\sin(\alpha_{R2}) \cdot C_{23} + \cos(\alpha_{R2}) \cdot C_{33} \mp B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) \mp B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})$$

der Einzelgleichung 3.3 gleich Null oder ungleich Null ist, handelt es sich um eine erreichbare oder unerreichbare Reduktionsstellung.

### 3. Lokale :

$c(\dots, w_c, \dots, W_{mn}, \dots, v_1, \dots)$  hängt von weiteren numerischen Werten  $W_{mn} \notin M_1$  oder Gelenkvariablen  $v_1 \notin M_1$  ab und die Bestimmungsgleichung kann mit bestimmten Werten für  $W_{mn}$  bzw.  $v_1$  korrekt und mit anderen Werten für  $W_{mn}$  bzw.  $v_1$  nicht korrekt erfüllt werden (Unterschied zu 2.). Damit können aber bestimmte Stellungen vom Roboter erreicht werden, andere dagegen nicht, und das bedeutet Freiheitsgrad  $f < 6$ .

### 4. Globale :

In diesem Fall sind  $a$  und  $b$  unabhängig von  $W_{ij}$  und  $v_k$  konstant gleich Null. Der Faktor  $c$  muß dann entweder gleich Null sein (triviale Gleichung) oder aber  $c$  muß abhängig von numerischen Werten  $W_{ij}$  bzw. von schon berechneten Gelenkvariablen  $v_k$  zu Null gemacht werden können. Dies ist immer möglich, da für jeden Roboter zumindest eine Stellung existiert, für die die kinematische Grundgleichung korrekt erfüllt ist. Im zweiten Fall ist der Freiheitsgrad des Roboters  $f < 6$ .

Im Beispiel der Orientierungsbetrachtung ist Fall 1 als globale Degeneration ausgewiesen worden.  $a$  und  $b$  sind nach Bedingung 1 und 2 konstant Null und es muß nur noch gezeigt werden, daß  $c$  abhängig von verschiedenen Zielvorgaben Null und ungleich Null wird. Da  $K_{33}$  der einzige von der Zielstellung beeinflusste Term in  $c$  ist, darf der Faktor " $B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})$ " nicht verschwinden. Anhand der Bedingungen 1 und 2 und der Orthonormiertheitsbedingung für  $B_{13}$ ,  $B_{23}$  und  $B_{33}$  läßt sich dies zeigen.

An dieser Stelle wird deutlich, daß es für Orientierungsgelenke keine lokale, sondern nur eine globale Orientierungsdegeneration gibt. Daneben kann lediglich aufgrund der Parallelität zweier nicht benachbarter Orientierungsgelenke eine Reduktionsstellung auftreten.

### 2.3.3 Positionswertbetrachtung

Dieses Verfahren führt immer dann zu einer geschlossenen Lösungsformel für eine Gelenkvariable  $v_p$ , wenn bis auf ein Gelenk P alle anderen Robotergelenke durch ihre Bewegung das Zielsystem nur in einer *Ebene* verändern.

Da Rotationsachsen, die durch den Ursprung des Zielsystems laufen, nur die Orientierung, jedoch nicht die Position des Zielsystems verändern, kommt dem im Ansatz zugrundegelegten Zielsystem entscheidende Bedeutung zu. So kann z.B. bei drei sich schneidenden Rotationsgelenkachsen durch die Wahl dieses Schnittpunktes als Ursprung des Zielsystems der Einfluß dieser drei Gelenke – die durchaus den Effektor in seiner Position verändern dürfen – auf den Bewegungsraum des Zielsystems eliminiert werden.

Für nichtdegenerierte Roboter, d.h. für Roboter mit dem Freiheitsgrad  $f=6$ , kann die obige Bedingung, daß sich das Zielsystem nur in einer Ebene verändern darf, nur eingehalten werden, wenn vorher mit Hilfe der Orientierungsbetrachtung schon drei Rotationsvariablen bestimmt wurden bzw. wenn zwei oder drei sich schneidende Rotationsgelenkachsen existieren. Alle bezüglich des zugrundegelegten Zielsystems positionsändernden, noch nicht festgelegten Rotationsgelenke  $\neq P$  müssen nämlich zueinander parallele Achsen besitzen und alle Translationsgelenke  $\neq P$  müssen senkrecht zu diesen parallelen Rotationsgelenkachsen verlaufen; nur dann existiert solch eine geforderte Bewegungsebene. Da aber mehr als drei Gelenke, die sich in parallelen Ebenen bewegen, genauso zur Degeneration führen wie mehr als drei sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneidende Rotationsgelenke, dürfen mindestens zwei der sechs Robotergelenke keine positionsändernden Gelenke sein. Dies ist nur möglich, wenn sich zwei Rotationsachsen in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt muß als Ursprung des Zielsystems gewählt werden.

Wird nun das Bezugssystem so gewählt, daß eine seiner Achsen senkrecht zu dieser Bewegungsebene verläuft, so kann die Gelenkvariable  $v_p$  aus der Position bezüglich dieser Bezugssystemachse explizit berechnet werden. Als Sonderfälle müssen auch hier lokale Degeneration, Reduktion und unerreichbare Zielstellung untersucht werden.

#### 1. Reduktionsstellung:

Eine Reduktionsstellung liegt genau dann vor, wenn der Ursprung des Zielsystems (bei voller dreidimensionaler Beweglichkeit) auf der Rotationsachse einer noch zu bestimmenden Rotationsvariablen liegt. In diesem Fall kann nämlich dieses Gelenk jede beliebige Stellung einnehmen, ohne dadurch eine Positionsänderung des Zielsystems zu verursachen.

#### 2. Unerreichbare Stellungen:

Eine unerreichbare Zielstellung liegt beim Auftreten eines negativen Radikanden vor oder wenn die Bestimmungsgleichung für eine Reduktionsstellung nicht korrekt erfüllt ist.

### 3. Degeneration:

In allen anderen Fällen, in denen die Gelenkvariable  $v_p$  aus der betrachteten Positionsgleichung verschwindet, handelt es sich um eine Degeneration.

Gelingt es, mit Hilfe des Positionswertverfahrens eine Variable zu bestimmen, verringert sich die Komplexität der kinematischen Gleichung so erheblich, daß für sämtliche noch unbekannte Variablen mit einem der hier beschriebenen Ansätze geschlossene Lösungen gefunden werden können.

Auch Roboter mit einem Getriebefreiheitsgrad  $F > 6$  können im Rahmen der Positionswertbetrachtung behandelt werden, wenn für alle möglichen Werte der vorher festgelegten  $F-6$  Gelenkvariablen sichergestellt ist, daß das Zielsystem nur in einer Ebene verändert wird.

### 2.3.4 Abstandsbetrachtung

Dieses Verfahren basiert neben der Aussage aus Abschnitt 2.3.3 zur Positionsinvarianz von Rotationsgelenken auf der Erkenntnis, daß Rotationsgelenkachsen, die durch den Ursprung des Bezugssystems laufen, zwar die Position, nicht jedoch den Abstand des Ursprungs des Zielsystems vom Ursprung des Bezugssystems verändern. Insofern liefern (nichtdegenerierte) Roboterkonstruktionen mit sechs Gelenken, von denen sich zwei bzw. drei disjunkte Rotationsgelenkachsen aufgrund der mechanischen Konstruktion in den Punkten 2S bzw. 3S schneiden, eine Möglichkeit zur expliziten Bestimmung der sechsten nicht an den Schnittpunkten 2S und 3S beteiligten Gelenkvariablen. Dazu wird der Ursprung des Bezugssystems und des Zielsystems der kinematischen Gleichung in den Schnittpunkt 2S bzw. 3S gelegt. Aus diesem Ansatz der kinematischen Gleichung  $M'=W'$  wird als Bestimmungsgleichung für die nicht an den Schnittpunkten beteiligte Gelenkvariable der Abstand zwischen Bezug- und Zielsystem berechnet:

$$\sqrt{M'_{14}{}^2 + M'_{24}{}^2 + M'_{34}{}^2} = \sqrt{W'_{14}{}^2 + W'_{24}{}^2 + W'_{34}{}^2} \quad \text{bzw. einfacher}$$

$$M'_{14}{}^2 + M'_{24}{}^2 + M'_{34}{}^2 = W'_{14}{}^2 + W'_{24}{}^2 + W'_{34}{}^2 \quad (\text{Abstandsgleichung})$$

In dieser Gleichung verschwinden alle Variablen der an den Schnittpunkten beteiligten fünf Gelenke und es kann eine Lösung für die gesuchte Gelenkvariable abgeleitet werden.

Für die restlichen fünf Variablen werden dann die Lösungen mit Hilfe der Positionswertbetrachtung und der Orientierungsbetrachtung ermittelt.

Die Beschränkung auf sechs Gelenke kann durch folgende Überlegung fallengelassen werden:

Besitzt ein Roboter  $F > 6$  Gelenke, dann müssen  $F-6$  Gelenkeinstellungen aus anderen Vorgaben als der der Zielstellung des Effektors bestimmt werden. Verletzen nun diese  $F-6$  Gelenke in ihrem *gesamten* Bewegungsbereich die für die verbleibenden sechs Gelenke

geforderten Konstruktionsvoraussetzungen *nicht*, dann können diese F-6 Gelenkvariablen wie Konstanten behandelt werden und auf die restlichen sechs Gelenkvariablen kann die Abstandsbetrachtung angewandt werden. Dies bedeutet konkret, daß eines der F-6 überzähligen Gelenke, sofern es sich in der kinematischen Kette zwischen zwei an einem Schnittpunkt 2S bzw. 3S beteiligten Gelenken befindet, durch sein Bewegungsverhalten kein anderes Gelenk aus diesem Schnittpunkt herausbewegen darf.

Ist nach der Anwendung von Positionswert- und Abstandsbetrachtung die dritte aus der Positionsspalte der homogenen 4x4-Matrix zu bestimmende Variable eine Rotationsvariable, so kann die Lösung aus zwei verschiedenen Gleichungen immer eindeutig und korrekt ermittelt werden; dies zeigt der folgende Satz:

**Satz: Bestimmung einer Rotationsvariablen aus der Positionsspalte**

Sind nach erfolgreicher Positions- und Abstandsbetrachtung anhand der kinematischen Gleichung  $\mathbf{R}(\mathbf{z},x) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$  die beiden Gleichungen

$$3.4: \quad X_{34} = Y_{34} \quad \text{und}$$

$$1.4^2 + 2.4^2 + 3.4^2: \quad X_{14}^2 + X_{24}^2 + X_{34}^2 = Y_{14}^2 + Y_{24}^2 + Y_{34}^2$$

erfüllt, dann ist die Rotationsgelenkvariable  $x$  aus 1.4 und 2.4 eindeutig und korrekt berechenbar:

$$x = \text{ATAN2}(X_{14} \cdot Y_{24} - X_{24} \cdot Y_{14}, X_{14} \cdot Y_{14} + X_{24} \cdot Y_{24})$$

Gilt außerdem  $X_{14}=0$  und  $X_{24}=0$ , dann sind die Gleichungen 1.4 und 2.4 auch für beliebig wählbares  $x$  immer erfüllt. In diesem Fall handelt es sich um eine erreichbare für die Variable  $x$ .

**Beweis**

Die kinematische Gleichung liefert folgende Einzelgleichungen:

$$1.4: \quad \cos(x) \cdot X_{14} - \sin(x) \cdot X_{24} = Y_{14}$$

$$2.4: \quad \sin(x) \cdot X_{14} + \cos(x) \cdot X_{24} = Y_{24}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\sin(x) = (X_{14} \cdot Y_{24} - X_{24} \cdot Y_{14}) / (X_{14}^2 + X_{24}^2)$$

$$\cos(x) = (X_{14} \cdot Y_{14} + X_{24} \cdot Y_{24}) / (X_{14}^2 + X_{24}^2)$$

$$\text{oder abgekürzt: } \sin(x) = a; \quad \cos(x) = b$$

Da  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  definitionsgemäß gegeben ist, muß auch  $a^2 + b^2 = 1$  gelten; andernfalls existiert keine Lösung für die Rotationsgelenkvariable  $x$ , die beide Gleichungen 1.4 und

2.4 korrekt erfüllt. Zum Nachweis von  $a^2+b^2=1$  quadrieren und addieren wir die obigen Bestimmungsgleichungen von  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ :

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = (Y_{14}^2+Y_{24}^2)\cdot(X_{14}^2+X_{24}^2)/(X_{14}^2+X_{24}^2)^2$$

Da aus  $1.4^2+2.4^2+3.4^2$  und 3.4 folgt

$$X_{14}^2+X_{24}^2 = Y_{14}^2+Y_{24}^2$$

ist der Beweis für  $X_{14}^2+X_{24}^2 \neq 0$  erbracht.

Im Fall  $X_{14}^2+X_{24}^2=0$  gilt mit  $X_{14}^2+X_{24}^2 = Y_{14}^2+Y_{24}^2 = 0$ , daß sowohl  $Y_{14}=0$  als auch  $Y_{24}=0$  sein muß. Damit sind Gleichung 1.4 und 2.4 auch für diesen Fall korrekt erfüllt.

Falls  $X_{14} \neq 0$  oder  $X_{24} \neq 0$  ist, erhalten wir die Lösung

$$x = \text{ATAN2}(X_{14} \cdot Y_{24} - X_{24} \cdot Y_{14}, X_{14} \cdot Y_{14} + X_{24} \cdot Y_{24})$$

Falls  $X_{14}=X_{24}=0$ , ist  $x$  beliebig wählbar (Reduktionsstellung).

### 2.3.5 Distanzbetrachtung

Dieses Verfahren ist aus einem Lösungsansatz mit Polynomen vom Grad vier durch Einschränkung der zugrundeliegenden Roboterklasse hervorgegangen; Ideen und Anregungen dazu kamen u.a. aus [Hiller 86], [Waldhauser 87] und [Yang 69] und basierten im wesentlichen darauf, daß durch die Gelenkbewegung zweier Rotationsachsen die Distanz zwischen diesen Achsen nicht beeinflußt wird. Existieren in der Roboterkonstruktion zwei weitere, zu je einer der Rotationsachsen parallele Translationsachsen, so verändern auch die Translationsvariablen die Distanz zwischen den Rotationsachsen nicht. Daher treten in der Distanzgleichung dieses Roboters nur die zwei restlichen Gelenkvariablen auf und es bleibt zu untersuchen, welche zusätzlichen Bedingungen die Roboterkonstruktion erfüllen muß, damit diese zwei Variablen in expliziter, quadratischen Form berechnet werden können.

Da die Roboterkonstruktion mit drei Translationsgelenken schon bei der Orientierungsbetrachtung erfaßt werden, bleiben sie hier unberücksichtigt. Mit der Distanzbetrachtung kann eine quadratische Lösung immer dann gefunden werden, wenn zwischen den zu den beiden Translationsachsen parallelen Rotationsachsen genau ein weiteres Rotationsgelenk existiert, das keinen Versatz entlang der Rotationsachse aufweist ( $h=0$ ).

Seien diese beiden Rotationsgelenke mit  $C_1$  und  $C_3$ , das zwischenliegende Rotationsgelenk mit  $R_2$  ( $=d_2, 0, l_2, \alpha_2$ ) und das vierte Rotationsgelenk mit  $R_4$  bezeichnet. Werden nun Bezug- und Zielsystem jeweils in das Koordinatensystem der Gelenke  $C_1$  und  $C_3$  gelegt, so liefern die Einzelgleichungen 3.3 und 1.4·2.3-2.4·1.3 (Distanzgleichung) zwei Gleichungen für  $\cos(d_2)$ , deren rechte Seiten noch die Terme  $\sin(d_4)$  und  $\cos(d_4)$  enthalten. Gleichsetzen der beiden rechten Seiten ergibt dann eine Gleichung, aus der die

Variable  $d_4$  des Rotationsgelenks  $R_4$  explizit quadratisch berechnet werden kann. Falls die Gelenkachse von  $R_2$  senkrecht auf beiden Gelenkachsen von  $C_1$  und  $C_3$  steht, genügt sogar die Gleichung 1.4·2.3-2.4·1.3 alleine zur Berechnung der Variablen  $d_4$ . Im Abschnitt 2.4.2 wird im Zusammenhang mit Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung mit Grad vier auch auf eine Obermenge dieser Roboterklasse eingegangen und dort sind die hier erwähnten Gleichungen aufgelistet.

Nach der Berechnung der Variablen  $d_4$  können die restlichen drei Rotationsvariablen  $d_1$ ,  $d_2$  und  $d_3$  mit Hilfe der Orientierungsbetrachtung ermittelt werden und zum Schluß lassen sich die beiden Translationsvariablen aus einem linearen System berechnen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß bei dieser Roboterklasse eine lokale Degeneration bei der Ermittlung der Translationsvariablen existieren kann.

### 2.3.6 Anwendung der Positionswertbetrachtung auf den ASEA-IR B6

Da der ASEA-IR B6 mit Knickhand die Voraussetzungen für die Anwendung der Positionswertbetrachtung erfüllt, benutzen wir nicht die in Abschnitt 2.1.6 berechnete Matrix  $\mathbf{M}$  und die zugehörige kinematische Gleichung, sondern es wird als erstes aus der vorgegebenen Zielstellung  $\mathbf{Z}$  des Effektors die für das Verfahren besser geeignete Zielmatrix  $\mathbf{W} = \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{T}(z_6, -L_6) \cdot \mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{TR})^{-1}$  gebildet.

Der Ansatz  $\mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{Z}_5 = \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_6 \cdot \mathbf{R}(z_6, d_6))^{-1}$  ermöglicht aus 3.4 eine Bestimmung der Variablen  $d_1$  (Positionswertbetrachtung) und – mit berechnetem  $d_1$  – aus 3.3 eine Bestimmung der Variablen  $d_6$  (Orientierungsbetrachtung).

$$3.4: \quad 0 = W_{14} \cdot \sin(d_1) - W_{24} \cdot \cos(d_1)$$

Damit wird

$$d_{1a} = \text{ATAN2}(W_{24}, W_{14}) \quad d_{1b} = \text{ATAN2}(-W_{24}, -W_{14})$$

Eine Reduktionsstellung für  $d_1$  liegt vor, falls  $W_{14}=0$  und  $W_{24}=0$ ; d.h. der Ursprung des Zielsystems  $W$  liegt auf der Achse  $z_1$  und ist daher positionsinvariant gegen Drehungen des Gelenks 1. Die Positionsinvarianz ist in diesem Fall ausreichend, da bei dieser Roboterkonstruktion die Orientierungsänderung, die durch ein beliebig gewähltes  $d_1$  hervorgerufen wird, durch die letzten zwei Orientierungsgelenke ausgeglichen werden kann, ohne dabei das Zielsystem  $W$  von seiner Position auf der Achse zu entfernen. Diese geometrische Argumentation nimmt sehr stark Bezug auf die vorliegende Roboterkonstruktion; ein allgemeines Interpretationsprinzip läßt sich daraus nicht ableiten. Damit zeigt sich der Vorteil der von uns gewählten abstrakten Definition für das Vorliegen einer Reduktionsstellung (vgl. Ende Abschnitt 2.3.2:  $c(\dots, w_c, \dots)=0$ ).

$$3.3: 0 = \sin(d_6) \cdot \cos(k) \cdot \{ \cos(d_1) \cdot W_{21} - \sin(d_1) \cdot W_{11} \} \\ + \cos(d_6) \cdot \cos(k) \cdot \{ \cos(d_1) \cdot W_{22} - \sin(d_1) \cdot W_{12} \} \\ + \sin(k) \cdot \{ \sin(d_1) \cdot W_{13} - \cos(d_1) \cdot W_{23} \}$$

Eine globale liegt für  $k=(n+0,5) \cdot \pi$ ,  $n \in \{0,1,2,\dots\}$ , vor. Da  $W_{13}$  und  $W_{23}$  beliebige Werte annehmen können, ist das Verschwinden des Faktors  $\{ \sin(d_1) \cdot W_{13} - \cos(d_1) \cdot W_{23} \}$  nicht garantiert. Damit ist 3.3 nicht korrekt erfüllt.

Eine Reduktionsstellung entsteht, wenn beide Faktoren von  $\sin(d_6)$  und  $\cos(d_6)$  gleich Null sind und der Restterm konstant und von der Zielstellung unabhängig ist; dies ist nur für  $k=n \cdot \pi$ ,  $n \in \{0,1,2,\dots\}$ , und  $\cos(d_1) \cdot W_{21} = \sin(d_1) \cdot W_{11}$  und  $\cos(d_1) \cdot W_{22} = \sin(d_1) \cdot W_{12}$  möglich.

Unerreichbare (Orientierungs-)en treten für  $k \neq n \cdot \pi$ ,  $n \in \{0,1,2,\dots\}$ , auf und werden durch einen negativen Radikanden in der Lösungsformel sichtbar.

Ist die Berechnung von  $d_6$  nicht an einer unerreichbaren Stellung bzw. an einer Degeneration gescheitert, dann kann aus 1.3 und 2.3 bzw. aus 3.1 und 3.2 eindeutig die (korrekte) Variable  $d_4$  bzw.  $d_5$  bestimmt werden:

$$d_4 = \text{ATAN2}( \sin(d_1) \cdot \{ \cos(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{21} + \cos(d_6) \cdot W_{22}) - \sin(k) \cdot W_{23} \} \\ + \cos(d_1) \cdot \{ \cos(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{11} + \cos(d_6) \cdot W_{12}) - \sin(k) \cdot W_{13} \} , \\ -\cos(k) \cdot \{ \sin(d_6) \cdot W_{31} + \cos(d_6) \cdot W_{32} \} + \sin(k) \cdot W_{33} )$$

$$d_5 = \text{ATAN2}( \sin(d_1) \cdot \{ \sin(d_6) \cdot W_{12} - \cos(d_6) \cdot W_{11} \} \\ - \cos(d_1) \cdot \{ \sin(d_6) \cdot W_{22} - \cos(d_6) \cdot W_{21} \} , \\ -\sin(d_1) \cdot \{ \sin(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{11} + \cos(d_6) \cdot W_{12}) + \cos(k) \cdot W_{13} \} \\ + \cos(d_1) \cdot \{ \sin(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{21} + \cos(d_6) \cdot W_{22}) + \cos(k) \cdot W_{23} \} )$$

Hinsichtlich der Berechnung der Variablen  $d_4$  sei auf die in Abschnitt 2.1.6 erläuterte Substitution der Gelenkvariablen  $d_3$  und  $d_4$  durch  $d_3-d_2$  und  $d_4-d_3$  verwiesen.

Um die noch unbestimmten Variablen  $d_2$  und  $d_3$  berechnen zu können, muß – nach schon erfolgter Anwendung der Positionswert- und Orientierungsbetrachtung – auf die Abstandsbetrachtung zurückgegriffen werden (Distanzbetrachtung kommt nur bei zwei Translationsgelenken in Frage). Hier zeigt sich ein Vorteil der streng formalen Vorgehensweise bei der Lösung der kinematischen Gleichung; diese Methodik vereinfacht die Suche nach möglichen Lösungswegen und unterstützt das Vorhaben, die Berechnung der Gelenkvariablen weitgehend rechnergestützt und automatisch ablaufen zu lassen.

In diesem fortgeschrittenen Stadium der Gelenkwinkelberechnung bieten sich mehrere mögliche Ansätze zur Abstandsbetrachtung, insbesondere dann, wenn die durch die Berechnung von  $d_1$ ,  $d_4$ ,  $d_5$  und  $d_6$  gültigen Beziehungen in die Ansätze mit eingebracht werden. Diese Strategie führt auch zu einer deutlichen Reduzierung der Komplexität der Lösungsformeln für  $d_2$  und  $d_3$ .

In unserem Beispiel ist durch die schon verwendeten Einzelgleichungen 3.4, 3.3, 1.3, 2.3, 3.1 und 3.2 und durch den Rückgriff auf den Satz über die vollständige Bestimmtheit einer homogenen  $4 \times 4$ - Matrix folgende Äquivalenz für die rechte Seite unseres Ansatzes gegeben:

$$\mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_6 \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_6, d_6))^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(d_4) \cdot \cos(d_5) & -\cos(d_4) \cdot \sin(d_5) & -\sin(d_4) & W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1) \\ \sin(d_4) \cdot \cos(d_5) & -\sin(d_4) \cdot \cos(d_5) & \cos(d_4) & W_{34} \\ -\sin(d_5) & -\cos(d_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sei die Matrix auf der rechten Seite dieser Äquivalenz bezeichnet mit  $\mathbf{A}$ , dann sind z.B. folgende Ansätze für die Abstandsbetrachtung geeignet:

$$\mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{Z}_3 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{Z}_5)^{-1} \quad \{\text{Berechnung von } d_3\}$$

$$\mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_5, d_5) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}_5, -L_H)^{-1} \quad \{\text{Berechnung von } d_3 - d_2\}$$

$$\mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_5, d_5) = \mathbf{D}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}_5, -L_H)^{-1} \quad \{\text{Berechnung von } d_2\}$$

Der bisher für die Positionswert- und Orientierungsbetrachtung verwendete Ansatz ist für die Abstandsbetrachtung nicht geeignet; denn wegen der statischen Gelenke  $G_3$  und  $G_4$  wird der Abstand zwischen dem Bezugssystem  $S_2$  und dem Zielsystem  $S_{X_6}$  von den (noch unbestimmten) Gelenkvariablen  $d_3 - d_2$  und  $d_4 - d_3$  bzw. nach Zusammenfassen der Variablen paralleler Gelenke von  $d_2$  und  $d_3$  beeinflusst.

Die Komplexität der aus den oben angeführten Ansätzen ableitbaren Formeln für  $d_2$  und  $d_3$  ist nur geringfügig verschieden, wir verwenden im weiteren den Ansatz

$$\text{II) } \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{Z}_3 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{Z}_5)^{-1}$$

$$\text{II1.4: } L_1 \cdot \cos(d_2) = -L_2 \cdot \cos(d_3) - L_H \cdot \sin(d_4) + W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)$$

$$\text{II2.4: } L_1 \cdot \sin(d_2) = -L_2 \cdot \sin(d_3) + L_H \cdot \cos(d_4) + W_{34}$$

$$\text{II3.4: } 0 = 0.$$

Die Abstandsbetrachtung  $\text{II1.4}^2 + \text{II2.4}^2 + \text{II3.4}^2$  liefert die Gleichung

$$L_1^2 = \{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)\}^2 + W_{34}^2 + L_H^2 + L_2^2$$

$$- 2 \cdot \sin(d_4) \cdot L_H \cdot \{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)\} + 2 \cdot \cos(d_4) \cdot L_H \cdot W_{34}$$

$$- 2 \cdot \sin(d_3) \cdot L_2 \cdot \{W_{34} + L_H \cdot \cos(d_4)\}$$

$$- 2 \cdot \cos(d_3) \cdot L_2 \cdot \{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1) - L_H \cdot \sin(d_4)\}$$

und daraus kann die Variable  $d_3$  berechnet werden; wird der Radikand negativ, so ist die Zielstellung .

Aus II1.4 und II2.4 folgt (bei positivem  $L_1$ ):

$$d_2 = \text{ATAN2}(W_{34} - L_2 \cdot \sin(d_3) + L_H \cdot \cos(d_4), \\ W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1) - L_2 \cdot \cos(d_3) - L_H \cdot \sin(d_4)).$$

Da verschiedene Ansätze für die Positionswert- und Abstandsbetrachtung herangezogen wurden, kann der im Abschnitt 2.3.4 angeführte Satz nicht zur Berechnung von  $d_2$  verwendet werden; die Existenz des statischen Gelenks  $G_3$  und das damit verbundene Auftreten der Gelenkvariablen  $d_2$  in *zwei* Übergangsmatrizen  $\mathbf{D}_{i,i+1}$  verhindert eine Anwendung des Satzes. Mit  $L_1 \neq 0$  existiert immer eine Möglichkeit,  $d_2$  zu berechnen, d.h. keine Reduktion oder Degeneration für  $d_2$ , und die Korrektheit der beiden Gleichungen  $\sin(d_2)=a$  und  $\cos(d_2)=b$ , d.h.  $a^2+b^2=1$ , ist durch die Abstandsbetrachtung gesichert.

In der Abstandsbetrachtung kann  $\{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)\}^2$  zu  $W_{14}^2 + W_{24}^2$  vereinfacht werden; dazu wird auf die Gleichung 3.4:  $0 = W_{14} \cdot \sin(d_1) - W_{24} \cdot \cos(d_1)$  zurückgegriffen. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn bei der Vereinfachung der Matrix A die Gleichung 3.4 nicht berücksichtigt wird und in 3.4 statt 0 der Term  $W_{14} \cdot \sin(d_1) - W_{24} \cdot \cos(d_1)$  stehen bleibt.

### 2.3.7 Einfluß verschiedener Ansätze auf die Lösungsstruktur am Beispiel des GdA06

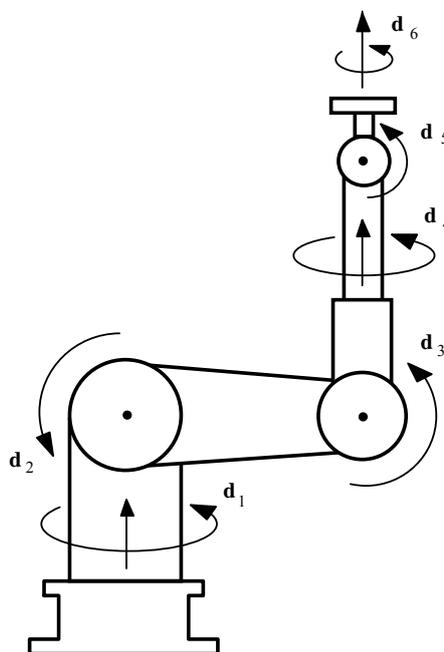


Abb. 2.5: Roboter GdA06

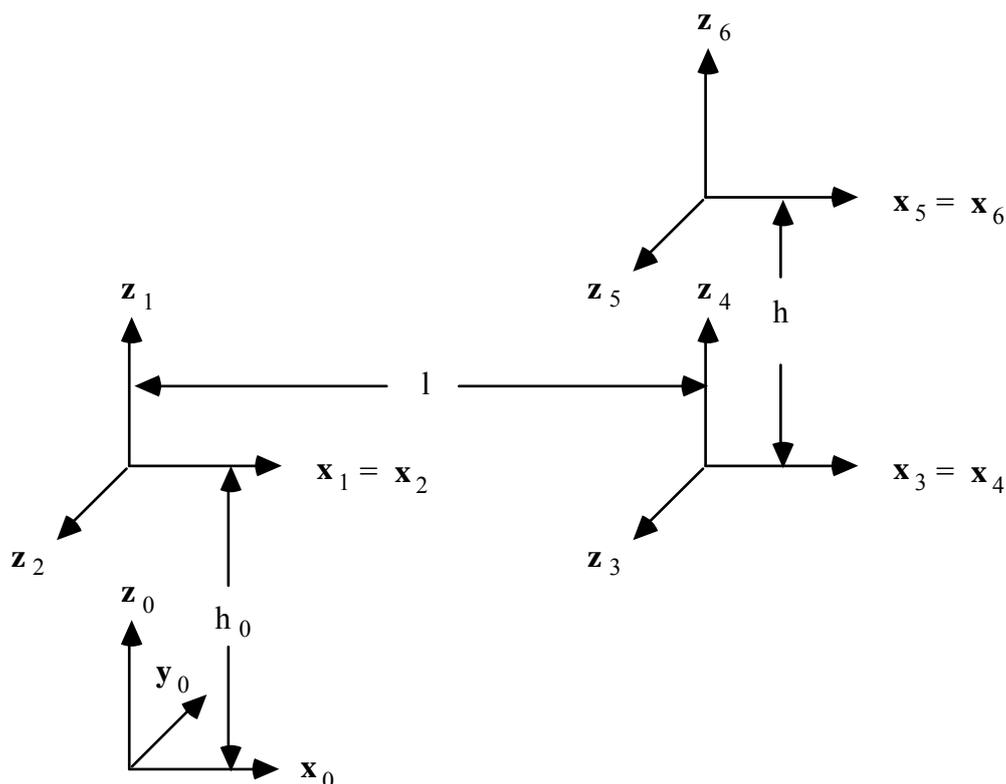


Abb. 2.6: Stellung der Gelenkkoordinatensysteme  $S_i$  des Roboters GdA06 bei Gelenk-Null-Lage

Der Roboter GdA06 wird – bei optimal gewählten Gelenk-Null-Lagen – durch folgende charakteristische Kenndaten beschrieben:

Gelenk	$\delta_i$	$\eta_i$	$l_i$	$\alpha_i$
1	$d_1$	0	0	$90^\circ$
2	$d_2$	0	1	$0^\circ$
3	$d_3$	0	0	$-90^\circ$
4	$d_4$	h	0	$90^\circ$
5	$d_5$	0	0	$-90^\circ$
6	$d_6$	0	0	$0^\circ$

Diese Roboterkonstruktion ist sowohl für die Anwendung der Positionswertbetrachtung als auch der Abstandsbetrachtung geeignet. Mit dem Ansatz

$$I) \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

können aus I3.4 die Variable  $d_1$  (Positionswertbetrachtung) und aus I1.4<sup>2</sup>+I2.4<sup>2</sup>+I3.4<sup>2</sup> (Abstandsbetrachtung) die Variable  $d_3$  unabhängig voneinander berechnet werden.

### Positionswertbetrachtung

Aus I3.4:  $0 = \sin(d_1) \cdot W_{14} - \cos(d_1) \cdot W_{24}$

Falls  $W_{14}=0$  und  $W_{24}=0$ , dann ist  $d_1$  beliebig wählbar (Reduktionsstellung),

sonst  $d_{1a} = \text{ATAN2}(W_{24}, W_{14})$  {der Zielstellung zugewandt, vgl. Abb. 2.7 links}

$d_{1b} = \text{ATAN2}(-W_{24}, -W_{14})$  {der Zielstellung abgewandt, vgl. Abb. 2.7 rechts}

Bei ähnlich gebauten Roboterkonstruktionen mit einem zusätzlichen Versatz  $h_2$  zwischen Gelenk 1 und Gelenk 2 (z.B. PUMA 560 von Unimation) werden die zwei möglichen Gelenkstellungen von  $d_1$  oft als *rechtshändig* bzw. *linkshändig* unterschieden; diese Begriffsbildung ist allerdings beim GdA06 nicht plausibel, weil hier  $h_2=0$  ist.

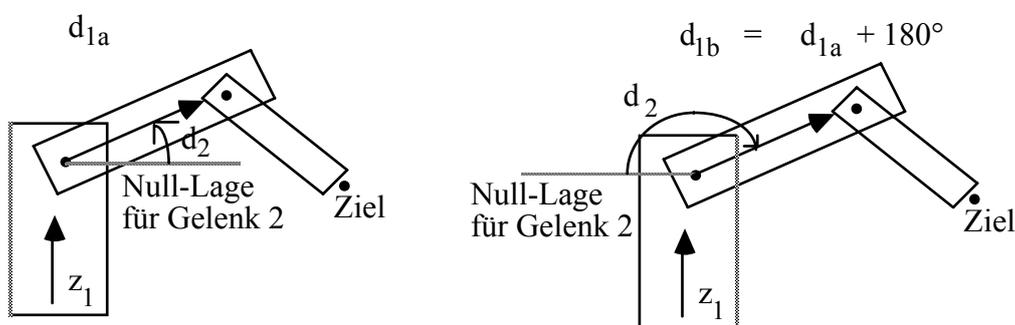


Abb. 2.7: Zweideutigkeit der Gelenkstellung  $d_1$

### Abstandsbetrachtung

Aus I1.4<sup>2</sup>+I2.4<sup>2</sup>+I3.4<sup>2</sup>:  $h^2 + l^2 - 2 \cdot h \cdot l \cdot \sin(d_3) = W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2$

Daraus folgt

$$\sin(d_3) = (h^2 + l^2 - W_{14}^2 - W_{24}^2 - W_{34}^2) / (2 \cdot h \cdot l) = a$$

$$\cos(d_3) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(d_3)} = \pm \sqrt{1 - a^2}$$

Die Lösung ergibt sich dann zu

$$d_{3a} = \text{ATAN2}(a, +\sqrt{1-a^2}) \quad d_{3b} = \text{ATAN2}(a, -\sqrt{1-a^2})$$

Eine Stellungunerreichbare Zielvorgabe liegt vor, falls der Radikand  $1-a^2$  negativ wird.

Eine isolierte Aussage, ob  $d_{3a}$  oder  $d_{3b}$  der nach oben bzw. unten gerichteten Gelenkstellung (vgl. Abb. 2.8) entspricht, kann nicht getroffen werden, da dies von der für die Variable  $d_1$  gewählten Lösung abhängt. Wir kommen hier in Bereiche, in denen die dem Anwender plausiblen Begriffe "Ellbogen unten" und "Ellbogen oben" eher zu Fehlinterpretationen führen, weil diese Begriffsbildung nicht für das gesamten Bewegungsintervall von Gelenk 2 plausibel bleibt. Im Falle der Gelenkvariablen  $d_3$  bleibt damit für die Unterscheidung der zwei Lösungen nur der Rückgriff auf das Vorzeichen der

Wurzel bzw. Aussagen darüber, ob der Winkelwert im Bereich  $[-90^\circ \dots 90^\circ]$  oder  $[90^\circ \dots 270^\circ]$  liegen soll.

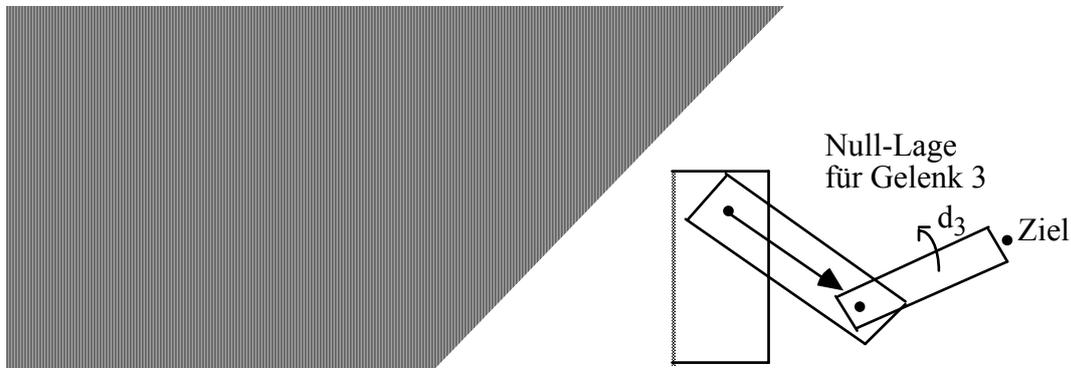


Abb. 2.8: Zweideutigkeit der Gelenkstellung  $d_3$  (für festen Wert  $d_1$ )

### Berechnung der Rotationsvariablen $d_2$ aus der Positionsspalte

Zur Berechnung der Variablen  $d_2$  kann der Satz (Bestimmung einer Rotationsvariablen aus der Positionsspalte) aus Abschnitt 2.3.4 herangezogen werden; Ansatz

$$1) \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

wird entsprechend den Vorgaben des Satzes dargestellt durch  $\mathbf{R}(\mathbf{z}, d_2) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$  mit:

$$X_{14} = -\sin(d_3) \cdot h + 1$$

$$X_{24} = \cos(d_3) \cdot h$$

$$Y_{14} = \cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}$$

$$Y_{24} = W_{34}$$

Hieraus ergibt sich

$$d_2 = \text{ATAN2}((- \sin(d_3) \cdot h + 1) \cdot W_{34} - \cos(d_3) \cdot h \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}), \\ (- \sin(d_3) \cdot h + 1) \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}) + \cos(d_3) \cdot h \cdot W_{34})$$

und eine bei  $X_{14}=0$  und  $X_{24}=0$  vorliegende Reduktionsstellung für  $d_2$  ist laut Satz immer erreichbar.

### Alternativer Lösungsansatz

Gerade für Roboter mit günstiger mechanischer Konstruktion gibt es mehrere unterschiedliche Ansätze, die zur Lösung einer Variablen herangezogen werden können. Ein systematisches Vorgehen anhand der hier vorgestellten Verfahren erweist sich jedoch – wie am folgenden Beispiel dargestellt – als effizienter.

Wird nach der Berechnung der Variablen  $d_1$  mittels Positionswertbetrachtung nicht erkannt, daß der Ansatz I auch für die Abstandsbetrachtung optimal geeignet ist, und zu dem Ansatz

$$\text{II) } \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

übergegangen, so führt das zwar zu Lösungen mit annähernd gleicher Komplexität, aber auch zum Verlust der voneinander unabhängigen Berechnungsmöglichkeit für  $d_1$  und  $d_3$  bzw.  $d_2$ . Der Ansatz II dient ebenfalls zur Anwendung der Abstandsbetrachtung, die Auswahl von Bezug- und Zielsystem ist jedoch nicht optimal getroffen, da sowohl  $d_1$  als auch  $d_2$  den Abstand zwischen Bezug- und Zielsystem bestimmen und somit die vorangegangene Berechnung von  $d_1$  eine wesentliche Bedingung für die Anwendbarkeit von Ansatz II ist (im Ansatz I bestimmt nur die Gelenkvariable  $d_3$  den Abstand).

Aus  $\text{II1} \cdot 4^2 + \text{II2} \cdot 4^2 + \text{II3} \cdot 4^2$ :

$$h^2 = W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2 + l^2 - \cos(d_2) \cdot 2 \cdot l \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}) - \sin(d_2) \cdot 2 \cdot l \cdot W_{34}$$

Umgeformt und abgekürzt ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\sin(d_2) \cdot a - \cos(d_2) \cdot b = c$$

und daraus die Lösung:

$$d_{2a,b} = \text{ATAN2}(c, \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}) + \text{ATAN2}(b, a)$$

Unerreichbar ist die Zielvorgabe, falls der Radikand  $a^2 + b^2 - c^2$  negativ ist. Für  $W_{14} = W_{24} = W_{34} = 0$  verschwindet die Variable  $d_2$  aus der Abstandsgleichung, es bleibt  $h^2 = l^2$ ; damit liegt eine Reduktionsstellung für  $d_2$  vor, die nur für  $l = \pm h$  erreichbar ist.

Ein Versuch, die in der Abstandsgleichung im Term  $\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}$  auftretende Variable  $d_1$  durch Einsetzen der vorher schon ermittelten Lösungsformel zu eliminieren, scheitert. Mit

$$\text{I3.4: } 0 = \sin(d_1) \cdot W_{14} - \cos(d_1) \cdot W_{24} \text{ (Positionswertbetrachtung)}$$

gilt zwar

$$\sin(d_1) = \cos(d_1) \cdot W_{24} / W_{14},$$

$$\text{und aus } \sin^2(d_1) + \cos^2(d_1) = 1$$

folgt

$$\cos^2(d_1) \cdot (W_{24}^2 + W_{14}^2) / W_{14}^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \cos(d_1) = \pm \frac{W_{14}}{\sqrt{W_{24}^2 + W_{14}^2}}$$

und damit gilt

$$\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24} = \pm \left( \frac{W_{14}^2}{\sqrt{W_{14}^2 + W_{24}^2}} + \frac{W_{24}^2 \cdot W_{14}}{W_{14} \cdot \sqrt{W_{14}^2 + W_{24}^2}} \right) = \pm \sqrt{W_{14}^2 + W_{24}^2},$$

doch da die Gültigkeit des Vorzeichens bei

$$\cos(d_1) = \pm \frac{W_{14}}{\sqrt{W_{24}^2 + W_{14}^2}}$$

von der in der Positionswertbetrachtung für  $d_1$  gewählten Lösungsvariante abhängt, kann  $d_1$  nur aus dem Term  $\text{ATAN2}(c, \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2})$ , nicht jedoch aus dem Term  $\text{ATAN2}(b,a)$  der für  $d_{2a,b}$  angegebenen Formel eliminiert werden. Deshalb können bei dieser Variante im Gegensatz zum Ansatz I  $d_1$  und  $d_2$  nicht unabhängig voneinander berechnet werden. Dies ist ein schwerwiegender Nachteil, wenn wir beispielsweise an Rechnerarchitekturen mit parallelen Prozessoren denken, wo die Bestimmung von  $d_1$  und  $d_2$  sonst parallel erfolgen könnte.

Nach der Ermittlung der Variablen  $d_1$  und  $d_2$  kann dann die Variable  $d_3$  aus I1.4 und I2.4 errechnet werden.

$$\text{I1.4: } -\sin(d_3) \cdot h + l = \cos(d_2) \cdot \{\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}\} + \sin(d_2) \cdot W_{34}$$

$$\text{I2.4: } \cos(d_3) \cdot h = -\sin(d_2) \cdot \{\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}\} + \cos(d_2) \cdot W_{34}$$

### Bestimmung der restlichen Variablen aus dem Orientierungsteil

Unabhängig davon, nach welcher Variante die Variablen aus der Positionsspalte bestimmt wurden, können die restlichen drei (Orientierungs-)Variablen  $d_4$ ,  $d_5$  und  $d_6$  mit Hilfe der Orientierungsbetrachtung berechnet werden. Dazu wird der Ansatz

$$\text{III) } \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{4,5}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{3,4}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W} \quad \text{zugrundegelegt.}$$

$$\text{Aus III3.3: } 0 = \sin(d_4) \cdot \{\cos(d_2 + d_3) \cdot [\cos(d_1) \cdot W_{13} + \sin(d_1) \cdot W_{23}] + \sin(d_2 + d_3) \cdot W_{33}\} \\ - \cos(d_4) \cdot \{\cos(d_1) \cdot W_{23} - \sin(d_1) \cdot W_{13}\}$$

$$\text{abgekürzt: } 0 = \sin(d_4) \cdot a - \cos(d_4) \cdot b$$

ergibt sich die Lösung, falls  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ ,

$$d_{4a} = \text{ATAN2}(b, a)$$

$$d_{4b} = \text{ATAN2}(-b, -a) = d_{4a} + \pi$$

Ist  $a=b=0$ , ergibt sich eine Reduktionsstellung und  $d_4$  ist beliebig wählbar.

Aus der Lösungsgleichung läßt sich ablesen, daß für alle Orientierungsvorgaben mindestens zwei Lösungswerte gefunden werden können; diese Aussage gilt immer dann, wenn die Rotationsachsen der Orientierungsgelenke aufeinander senkrecht stehen.

Eindeutige und korrekte Werte für die Variable  $d_5$  bzw.  $d_6$  können aus den Gleichungen III1.3 und III2.3 bzw. III3.1 und III3.2 hergeleitet werden. Damit erhalten wir für jede Zielvorgabe acht verschiedene Lösungstupel für die Gelenkvariablen.

### **2.3.8 Zusammenstellung der explizit quadratisch lösbaren Roboterklassen**

Ausgehend von den Voraussetzungen der in Abschnitt 2.3.2 bis Abschnitt 2.3.5 beschriebenen quadratischen Lösungsverfahren werden Roboterklassen definiert, die für die Anwendung eines der vier beschriebenen Lösungsverfahren geeignet sind. Die folgende Betrachtung bezieht sich auf Roboter mit dem Getriebefreiheitsgrad  $F = 6$  bzw. auf die sechs noch unbestimmten Gelenke bei einem Getriebefreiheitsgrad  $F > 6$ ; in Klammern ist jeweils das erste anzuwendende Verfahren zur Berechnung der Gelenkvariablen angegeben:

1. Roboter mit drei Translationsgelenken (Orientierungsbetrachtung)
2. Roboter mit zwei Translationsgelenken und zwei zueinander parallelen Rotationsgelenken (Orientierungsbetrachtung)
3. Roboter mit zwei Translationsgelenken und drei sich schneidenden Rotationsgelenken (Positionswertbetrachtung)
4. Roboter mit zwei sich schneidenden Rotationsgelenken und einem weiteren Rotationsgelenk, das senkrecht auf zwei Translationsgelenken steht (Positionswertbetrachtung)
5. Roboter mit einem Translationsgelenk und drei zueinander parallelen Rotationsgelenken (Orientierungsbetrachtung)
6. Roboter mit zweimal zwei zueinander parallelen Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk, das senkrecht auf einem der parallelen Rotationsachsenpaare steht (Orientierungsbetrachtung)
7. Roboter mit zwei sich schneidenden Rotationsgelenken und zwei weiteren zueinander parallelen Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk, das senkrecht auf diesen zwei parallelen Rotationsgelenken steht (Positionswertbetrachtung)
8. Roboter mit drei sich schneidenden Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk, das senkrecht auf einem weiteren Rotationsgelenk steht (Positionswertbetrachtung)
9. Roboter mit drei sich schneidenden und weiteren zwei sich schneidenden Rotationsgelenken (Abstandsbetrachtung)
10. Roboter mit drei zueinander parallelen Rotationsgelenken und weiteren zwei zueinander parallelen Rotationsgelenken:

Das sechste (nicht im Sinne einer kinematischen Reihenfolge!) Gelenk muß ein Rotationsgelenk sein, da sonst eine globale Orientierungsdegeneration vorliegt. (Orientierungsbetrachtung)

11. Roboter mit zwei sich schneidenden Rotationsgelenken und drei weiteren zueinander parallelen Rotationsgelenken:  
Das sechste (nicht im Sinne einer kinematischen Reihenfolge!) Gelenk ist ein Rotationsgelenk, da sonst die Konstellation unter den Punkt 5 fällt. (Positionswertbetrachtung)
12. Roboter mit drei sich schneidenden Rotationsgelenken und zwei weiteren zueinander parallelen Rotationsgelenken (Positionswertbetrachtung)
13. Roboter mit zwei Translationsgelenken, die zu je einem Rotationsgelenk parallel sind, und einem weiteren Rotationsgelenk, das sich als einziges Gelenk zwischen diesen beiden Paaren paralleler Translations- und Rotationsgelenke befindet und keinen Versatz entlang seiner Rotationsachse aufweist (Distanzbetrachtung)

## 2.4 Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung mit Grad vier

### 2.4.1 Roboterkonstruktionen mit drei sich schneidenden Rotationsachsen

Alle Roboter mit drei sich schneidenden Rotationsgelenken führen auf Bestimmungsgleichungen für die Gelenkvariablen, die Polynome vom Grad  $\leq 4$  sind [Pieper 69].

Der Abschnitt 2.3.8 zeigt, daß die hier betrachteten Roboterkonstruktionen mit zwei und drei Translationsgelenken sogar zu quadratischen Lösungspolynome führen. Wir beschränken uns daher auf Roboter mit sechs Rotationsgelenken oder mit fünf Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk. Den Beweis für obige Behauptung führen wir auf der Basis der hier entwickelten Theorie und verwenden folgenden Ansatz: das Koordinatensystem  $S_i$  eines nicht am Dreifach-Schnittpunkt 3S beteiligten Rotationsgelenks wird als Bezugssystem und der Schnittpunkt 3S der drei Rotationsachsen als Ursprung des Zielsystems gewählt. Dieser Ansatz kann immer erreicht werden; falls in der kinematischen Kette kein zusätzliches Rotationsgelenk vor dem Dreifach-Schnittpunkt 3S existiert, kann durch Invertierung der gesamten kinematischen Gleichung Abhilfe geschaffen werden.

Zur Bestimmung der Gelenkvariablen werden die z-Positionswertgleichung (3.4) und die Abstandsgleichung benötigt; nach den in Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4 erläuterten geometrischen Überlegungen enthalten beide Gleichungen nur noch die beiden Gelenkvariablen der nicht im Bezugssystem liegenden und nicht am Dreifach-Schnittpunkt 3S beteiligten Gelenke. Da nach den Eingangsüberlegungen maximal ein Translationsgelenk in der Konstruktion zugelassen ist, tritt in den beiden Gleichungen mindestens eine Rotationsvariable auf.

#### Roboter mit sechs Rotationsachsen

Aus der kinematischen Grundgleichung kann (notfalls durch Invertierung) immer der Ansatz  $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$  erzeugt werden;  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  sind dabei homogene Transformationsmatrizen von Rotationsgelenken,  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  enthalten die restlichen Variablen und die Zielvorgabe  $\mathbf{W}$ . Konstante D-H-Parameter sind soweit wie möglich schon in die Zielstellung  $\mathbf{W}$  integriert. Das durch  $\mathbf{A}$  definierte Zielsystem liegt mit seinem Ursprung im Dreifach-Schnittpunkt 3S. Die D-H-Parameter der drei am Dreifach-Schnittpunkt 3S beteiligten Rotationsgelenke werden mit den Indizes 3S1, 3S2 und 3S3 gekennzeichnet und für  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  kommen damit maximal folgende D-H-Parameter in Frage:

für  $\mathbf{A}$ :  $(v_1, h, l, \alpha)$ ,  $(d_{3S1}, h_{3S1}, 0, \alpha_{3S1})$ ,  $(d_{3S2}, 0, 0, \alpha_{3S2})$ ,  $(d_{3S3}, 0, 0, 0)$

für  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{W}$ ,  $(v_1, 0, 0, 0)^{-1}$ ,  $(0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})^{-1}$

Diese Überlegungen spielen später bei den Gradabschätzungen des Lösungspolynoms eine entscheidende Rolle.

Der Ansatz  $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$  liefert folgende Gleichungen:

$$1.4: \sin(d_1) \cdot \{ \sin(\alpha_1) \cdot (A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2) + h_2) \\ - \cos(\alpha_1) \cdot \{ \sin(d_2) \cdot (A_{14} + l_2) + \cos(d_2) \cdot (A_{24} \cdot \cos(\alpha_2) - A_{34} \cdot \sin(\alpha_2)) \} \} \\ + \cos(d_1) \cdot \{ l_1 + \cos(d_2) \cdot (A_{14} + l_2) - \sin(d_2) \cdot (A_{24} \cdot \cos(d_2) - A_{34} \cdot \sin(\alpha_2)) \} = B_{14}$$

$$2.4: -\cos(d_1) \cdot \{ \sin(\alpha_1) \cdot (A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2) + h_2) \\ - \cos(\alpha_1) \cdot \{ \sin(d_2) \cdot (A_{14} + l_2) + \cos(d_2) \cdot (A_{24} \cdot \cos(\alpha_2) - A_{34} \cdot \sin(\alpha_2)) \} \} \\ + \sin(d_1) \cdot \{ l_1 + \cos(d_2) \cdot (A_{14} + l_2) - \sin(d_2) \cdot (A_{24} \cdot \cos(d_2) - A_{34} \cdot \sin(\alpha_2)) \} = B_{24}$$

$$3.4: \sin(\alpha_1) \cdot \{ \sin(d_2) \cdot (A_{14} + l_2) + \cos(d_2) \cdot (A_{24} \cdot \cos(\alpha_2) - A_{34} \cdot \sin(\alpha_2)) \} \\ + \cos(\alpha_1) \cdot (A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2) + h_2) = B_{34} - h_1$$

Abstandsgleichung:

$$l_1^2 + h_2^2 + (A_{14} + l_2)^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 + 2 \cdot h_2 \cdot (A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2)) \\ + 2 \cdot l_1 \cdot \{ \cos(d_2) \cdot (A_{14} + l_2) - \sin(d_2) \cdot (A_{24} \cdot \cos(\alpha_2) - A_{34} \cdot \sin(\alpha_2)) \} \\ = B_{14}^2 + B_{24}^2 + (B_{34} - h_1)^2$$

In Anlehnung an die Terminologie in [Pieper 69] werden folgende Abkürzungen definiert:

$$F_1 = A_{14} + l_2$$

$$F_2 = A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$F_3 = l_1^2 + h_2^2 + (A_{14} + l_2)^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 + 2 \cdot h_2 \cdot (A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2))$$

$$F_4 = \cos(\alpha_1) \cdot (A_{24} \cdot \sin(\alpha_2) + A_{34} \cdot \cos(\alpha_2) + h_2)$$

$$3.4: \sin(\alpha_1) \cdot \{ \sin(d_2) \cdot F_1 + \cos(d_2) \cdot F_2 \} + F_4 = B_{34} - h_1$$

$$\text{Abstandsgleichung: } F_3 + 2 \cdot l_1 \cdot \{ \cos(d_2) \cdot F_1 - \sin(d_2) \cdot F_2 \} = B_{14}^2 + B_{24}^2 + (B_{34} - h_1)^2$$

In der z-Positionswertgleichung 3.4 und der Abstandsgleichung treten nur die Variable  $d_2$  und eine weitere, in den Elementen  $A_{ij}$  oder  $B_{ij}$  enthaltene Variable  $v_1$  auf. Aus diesen beiden Gleichungen wird nun die Variable  $d_2$  eliminiert und ein Lösungspolynom vierten Grades für die Variable  $v_1$  erzeugt. Dazu muß die Variable  $d_2$  auf einer Gleichungsseite isoliert werden; durch Quadrieren und Addieren der beiden umgeformten Gleichungen verschwindet die Variable  $d_2$  und es bleibt das Lösungspolynom

$$F_1^2 + F_2^2 = \{ (B_{34} - h_1 - F_4) / \sin(\alpha_1) \}^2 + \{ (B_{14}^2 + B_{24}^2 + (B_{34} - h_1)^2 - F_3) / (2 \cdot l_1) \}^2$$

in der Variablen  $v_1$ .

$l_1 \neq 0$  und  $\sin(\alpha_1) \neq 0$  kann vorausgesetzt werden, da andernfalls die Roboterkonstruktion sogar auf eine quadratische Lösungsgleichung führen würde (vgl. Abschnitt 2.3.8, Nr. 9 und Nr. 12).

Da es sich bei der Variablen  $v_1$  um eine Rotationsvariable handelt, die entsprechend der Tangenssubstitution  $x = \tan(v_1/2)$  (vgl. Abschnitt 2.2.3) vom Grad 2 ist, und da diese Variable  $v_1$  nur in den Elementen  $A_{ij}$  oder  $B_{ij}$  enthalten ist, sind für die Gradbestimmung

des Lösungspolynoms nur die Terme von Interesse, deren Grad in  $A_{ij}$  bzw.  $B_{ij} > 2$  ist. Das ist nur für den letzten Term  $\{(B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2-F_3)/(2 \cdot l_1)\}^2$  des Polynoms der Fall. Zum Beweis, daß der Grad dieses Polynoms  $\leq 4$  ist, bleibt deshalb noch zu zeigen:

$(A_{14}+l_2)^2+A_{24}^2+A_{34}^2$  und  $B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2$  sind Terme in  $x=\tan(v_1/2)$  mit Grad  $\leq 2$ , wobei die Konstanten  $l_2$  und  $h_1$  den Grad nicht beeinflussen und deshalb nicht weiter mitgeführt werden

Aufgrund der Überlegungen zur Struktur von **A** und **B** am Anfang dieses Abschnitts gilt für  $A_{14}^2+A_{24}^2+A_{34}^2$  bzw.  $B_{14}^2+B_{24}^2+B_{34}^2$  immer:

$$A_{14}^2+A_{24}^2+A_{34}^2 = h_{3S1}^2+l^2+h^2 + 2 \cdot h_{3S1} \cdot h \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned} B_{14}^2+B_{24}^2+B_{34}^2 = & W_{14}^2+W_{24}^2+W_{34}^2+h_{3S3}^2+l_{3S3}^2 \\ & - 2 \cdot \{W_{14} \cdot W_{13}+W_{24} \cdot W_{23}+W_{34} \cdot W_{33}\} \cdot \{\cos(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} \\ & - 2 \cdot \{W_{14} \cdot W_{12}+W_{24} \cdot W_{22}+W_{34} \cdot W_{32}\} \cdot \{\cos(v_1) \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}-\sin(v_1) \cdot l_{3S3}\} \\ & - 2 \cdot \{W_{14} \cdot W_{11}+W_{24} \cdot W_{21}+W_{34} \cdot W_{31}\} \cdot \{\cos(v_1) \cdot l_{3S3}+\sin(v_1) \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} \end{aligned}$$

Damit führt das obige Lösungspolynom maximal zu Grad vier bzgl. der Variablen  $x=\tan(v_1/2)$ .

Wir haben an dieser Stelle gezeigt, daß eine geschlossene Lösung im Prinzip möglich ist, wollen aber aufgrund der geringen praktischen Bedeutung dieser Lösungsformen diesen Weg nicht weiter verfolgen.

### Roboter mit fünf Rotations- und einer Translationsachse:

In diesem Fall können alle Konstruktionsvarianten durch Invertierung einzelner Randmatrizen bzw. der gesamten kinematischen Gleichung auf drei Ansätze zurückgeführt werden. Diese Überlegung wird durch folgende Aussage unterstützt:

Wird die kinematische Kette der drei sich schneidenden Rotationsgelenke von einem Translationsgelenk unterbrochen (ein Dreifach-Schnittpunkt 3S existiert nur, wenn die Translationsachse parallel zur Achse des ersten oder dritten Rotationsgelenk ist), dann kann die Reihenfolge der D-H-Parameter immer so umgeformt werden, daß die Beschreibung des Translationsüberganges vor oder hinter die Beschreibung der drei sich schneidenden Rotationsgelenke gezogen wird ([Heiß 85]) und eine kompakte Darstellung  $3S = (R_{3S1}, R_{3S2}, R_{3S3})$  der drei Rotationsgelenke entsteht.

Die drei Ansätze für die kinematische Gleichung haben folgendes Aussehen:

$\alpha) \quad \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$

mit  $\mathbf{B}=(0, t, l, \alpha)^{-1} \cdot \mathbf{W}$  oder  $\mathbf{B}=\mathbf{W}$  oder  $\mathbf{B}=\mathbf{W} \cdot (0, t, 0, 0)^{-1} \cdot (0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})^{-1}$   
und  $\mathbf{A}=(\vartheta, t, l, \alpha), (d_{3S1}, h_{3S1}, 0, \alpha_{3S1}), (d_{3S2}, 0, 0, \alpha_{3S2}), (d_{3S3}, 0, 0, 0)$

$\beta) \quad \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_2 \cdot 3S = \mathbf{W}$

$\gamma) \quad \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot 3S = \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{R}_2^{-1} \cdot \mathbf{Konst}^{-1}$

mit  $\mathbf{A} = (\vartheta, t, l, \alpha)$  und  $\mathbf{B} =$  neutrales Element

oder  $\mathbf{A}$  = neutrales Element und  $\mathbf{B} = (0, t, l, \alpha)^{-1}$   
 und  $\mathbf{Konst} = (0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})$

zu  $\alpha$ ) Da  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  nur die Translationsvariable  $t$  enthalten, liefert  $(A_{14}+l_2)^2+A_{24}^2+A_{34}^2$  und  $B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2$  maximal den Grad zwei in  $v_1=t$  und damit kann diese Variante wie im Fall ohne Translationsgelenk behandelt werden.

zu  $\beta$ ) Die Roboterklasse hat folgende Struktur

$$(d_1, h_1, l_1, \alpha_1) \cdot (\vartheta, t, l_T, \alpha_T) \cdot (d_2, h_2, l_2, \alpha_2) \cdot (d_3, h_3, 0, \alpha_3) \cdot (d_4, 0, 0, \alpha_4) \cdot (d_5, h_5, l_5, \alpha_5),$$

die zu folgendem Ansatz führt:

$$\mathbf{R}(z_1, d_1) \cdot \mathbf{T}(x_1, l_1) \cdot \mathbf{R}(x_1, \alpha_1) \cdot \mathbf{R}(z, \vartheta) \cdot \mathbf{T}(z, t) \cdot \mathbf{T}(x, l_T) \cdot \mathbf{R}(x, \alpha_T) \cdot \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} = \\ \{=\mathbf{T}(z_1, h_1)^{-1} \cdot \mathbf{Ziel} \cdot \mathbf{R}(x_5, \alpha_5)^{-1} \cdot \mathbf{T}(x_5, l_5)^{-1} \cdot \mathbf{T}(z_5, h_5)^{-1}\} = \mathbf{W}$$

Daraus folgt:

$$3.4: \cos(\alpha_1) \cdot \{t + \sin(\alpha_T) \cdot (\sin(d_2) \cdot l_2 - \cos(d_2) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3) + \cos(\alpha_T) \cdot (h_2 + \cos(\alpha_2) \cdot h_3)\} \\ - \sin(\alpha_1) \cdot \{ \cos(\vartheta) \cdot \{ \sin(\alpha_T) \cdot (h_2 + \cos(\alpha_2) \cdot h_3) - \cos(\alpha_T) \cdot (\sin(d_2) \cdot l_2 - \cos(d_2) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3) \} \\ - \sin(\vartheta) \cdot \{ \sin(d_2) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3 + \cos(d_2) \cdot l_2 + l_T \} \} \\ = W_{34}$$

Abstandsgleichung:

$$l_1^2 + l_T^2 + h_2^2 + l_2^2 + h_3^2 \\ + 2 \cdot \{h_2 \cdot h_3 \cdot \cos(\alpha_2) + l_1 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\alpha_T) \cdot (h_2 + \cos(\alpha_2) \cdot h_3) + l_1 \cdot \cos(\vartheta) \cdot l_T\} \\ + t^2 \\ + 2 \cdot t \cdot \{(\sin(d_2) \cdot l_2 - \cos(d_2) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3) \cdot \sin(\alpha_T) + \cos(\alpha_T) \cdot (h_2 + \cos(\alpha_2) \cdot h_3)\} \\ + 2 \cdot \sin(d_2) \cdot \{l_T \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3 - l_1 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\alpha_T) \cdot l_2 + l_1 \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3\} \\ + 2 \cdot \cos(d_2) \cdot \{l_T \cdot l_2 + l_1 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\alpha_T) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_3 + l_1 \cdot \cos(\vartheta) \cdot l_2\} \\ = W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2$$

Wegen  $\cos(\alpha_1) \neq 0$  (sonst führt die Konstruktion auf eine quadratische Bestimmungsgleichung, vgl. Abschnitt 2.3.8 Nr. 8) kann die Gleichung 3.4 so umgeformt werden, daß  $t$  durch einen Term in  $x = \tan(d_2/2)$  mit Grad  $\leq 2$  darstellbar ist:  $t = f(\tan(d_2/2))$ . Wird der Term  $f(\tan(d_2/2))$  nun in die Abstandsgleichung statt  $t$  eingesetzt, dann erhalten wir ein Polynom vierten Grades in  $x = \tan(d_2/2)$ .

zu  $\gamma$ ) Hier läuft die Beweisführung analog zu  $\beta$ ). Die Roboterklasse erlaubt die Strukturen

$$(d_1, h_1, l_1, \alpha_1) \cdot (\vartheta, t, l, \alpha) \cdot (d_{3S1}, h_{3S1}, 0, \alpha_{3S1}) \cdot (d_{3S2}, 0, 0, \alpha_{3S2}) \cdot (d_{3S3}, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3}) \cdot \\ (d_2, h_2, l_2, \alpha_2) \text{ bzw.}$$

$$(\vartheta, t, l, \alpha) \cdot (d_1, h_1, l_1, \alpha_1) \cdot (d_{3S1}, h_{3S1}, 0, \alpha_{3S1}) \cdot (d_{3S2}, 0, 0, \alpha_{3S2}) \cdot (d_{3S3}, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3}) \cdot \\ (d_2, h_2, l_2, \alpha_2),$$

die zu folgenden Ansätzen führen:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}_1, d_1) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, l_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}_1, \alpha_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}, \vartheta) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, l) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha) \cdot \mathbf{D}_{3S1,3S2} \cdot \mathbf{D}_{3S2,3S3} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_{3S3}, d_{3S3}) = \mathbf{W} \cdot (d_2, 0, 0, 0)^{-1} \cdot (0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})^{-1}$$

bzw.

$$\mathbf{D}_{1,2} \cdot \mathbf{D}_{3S1,3S2} \cdot \mathbf{D}_{3S2,3S3} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_{3S3}, d_{3S3}) = (0, t, l, \alpha)^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (d_2, 0, 0, 0)^{-1} \cdot (0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})^{-1}$$

Konstante D-H-Parameter sind – soweit möglich – schon in die Zielstellung  $\mathbf{W}$  integriert. Damit ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 3.4: & \sin(\alpha_1) \cdot \{\sin(\vartheta) \cdot l - \cos(\vartheta) \cdot \sin(\alpha) \cdot h_{3S1}\} + \cos(\alpha_1) \cdot \{t + \cos(\alpha) \cdot h_{3S1}\} = \\ & = \sin(d_2) \cdot \{W_{32} \cdot l_{3S3} - W_{31} \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} - \cos(d_2) \cdot \{W_{31} \cdot l_{3S3} + W_{32} \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} \\ & - W_{33} \cdot \cos(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3} + W_{34} \end{aligned}$$

bzw. mit der Abkürzung  $\mathbf{C} = (0, t, l, \alpha)^{-1} \cdot \mathbf{W}$  für die zweite Struktur

$$\begin{aligned} 3.4: & h_1 + \cos(\alpha_1) \cdot h_{3S1} = \\ & = \sin(d_2) \cdot \{C_{32} \cdot l_{3S3} - C_{31} \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} - \cos(d_2) \cdot \{C_{31} \cdot l_{3S3} + C_{32} \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} \\ & - C_{33} \cdot \cos(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3} + C_{34} \end{aligned}$$

Die Variable  $t$  tritt bei  $\mathbf{C}$  nur in

$$C_{24} = \cos(\alpha) \cdot W_{24} + \sin(\alpha) \cdot \{W_{34} - t\} \quad \text{und} \quad C_{34} = \cos(\alpha) \cdot \{W_{34} - t\} - \sin(\alpha) \cdot W_{24}$$

auf; damit sind beide Gleichungen 3.4 linear in  $t$  und mit  $\cos(\alpha_1) \neq 0$  bzw.  $\cos(\alpha) \neq 0$  ist  $t = f(\tan(d_2/2))$  mit  $\text{Grad}(f) \leq 2$  immer möglich.

Abstandsgleichung:

$$\begin{aligned} & l_1^2 + t^2 + l^2 + h_{3S1}^2 + 2 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot h_{3S1} \cdot t + 2 \cdot l_1 \cdot \{\cos(\vartheta) \cdot l + \sin(\vartheta) \cdot \sin(\alpha) \cdot h_{3S1}\} = \\ & = W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2 + h_{3S3}^2 + l_{3S3}^2 \\ & - 2 \cdot \{W_{11} \cdot W_{14} + W_{21} \cdot W_{24} + W_{31} \cdot W_{34}\} \cdot \{\cos(d_2) \cdot l_{3S3} + \sin(d_2) \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} \\ & - 2 \cdot \{W_{12} \cdot W_{14} + W_{22} \cdot W_{24} + W_{32} \cdot W_{34}\} \cdot \{\cos(d_2) \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3} - \sin(d_2) \cdot l_{3S3}\} \\ & - 2 \cdot \{W_{13} \cdot W_{14} + W_{23} \cdot W_{24} + W_{33} \cdot W_{34}\} \cdot \cos(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & h_1^2 + l_1^2 + h_{3S1}^2 + 2 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot h_1 \cdot h_{3S1} = \\ & = C_{14}^2 + C_{24}^2 + C_{34}^2 + h_{3S3}^2 + l_{3S3}^2 \\ & - 2 \cdot \{C_{11} \cdot C_{14} + C_{21} \cdot C_{24} + C_{31} \cdot C_{34}\} \cdot \{\cos(d_2) \cdot l_{3S3} + \sin(d_2) \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3}\} \\ & - 2 \cdot \{C_{12} \cdot C_{14} + C_{22} \cdot C_{24} + C_{32} \cdot C_{34}\} \cdot \{\cos(d_2) \cdot \sin(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3} - \sin(d_2) \cdot l_{3S3}\} \\ & - 2 \cdot \{C_{13} \cdot C_{14} + C_{23} \cdot C_{24} + C_{33} \cdot C_{34}\} \cdot \cos(\alpha_{3S3}) \cdot h_{3S3} \end{aligned}$$

Auch hier führt das Einsetzen von  $t = f(\tan(d_2/2))$  zu einem Lösungspolynom für  $\tan(d_2/2)$  vom Grad  $\leq 4$ .

## 2.4.2 Roboterkonstruktionen mit 2 Zylindergelenken

Als Zylindergelenke C werden die Gelenkeinheiten eines Roboters bezeichnet, bei denen Rotationsachse und Translationsachse identisch sind; die D-H-Parameter für diese Gelenke mit dem Freiheitsgrad zwei lauten  $(d, t, l, \alpha)$  und die zu den beiden Variablen  $d$  und  $t$  gehörende Transformationsmatrix wird mit  $\mathbf{ZC}$  bezeichnet.  $\mathbf{ZR}$  kennzeichnet die aus  $(d, h)$  entstandene Transformationsmatrix eines Rotationsgelenks und  $\mathbf{X}_i$  ist die bisher schon bekannte Transformationsmatrix für die Translation und die Rotation bzgl. der  $x_i$ -Achse. Das von Yang vorgestellte Verfahren [Yang 69] basiert auf der Verwendung dualer  $3 \times 3$ -Matrizen und stützt sich auf folgenden Ansatz:

$$\mathbf{ZC}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{ZC}_n = \dots$$

Aus der Orientierungsbetrachtung (Abschnitt 2.3.2) ist bekannt:

Im Primärteil und im Sekundärteil von 3.3 des obigen Matrixprodukts verschwinden  $d_1$  und  $d_n$ ,  $t_1$  und  $t_n$  treten im Primärteil (=Orientierung) nicht auf. Daß eine Translationsbewegung des Zylindergelenks  $C_n$  die Stellung der z-Geraden des Zielsystems nicht verändert und daher  $t_n$  nicht im Sekundärteil der dritten Spalte auftritt, wird einsichtig, wenn man sich vor Augen führt, daß die z-Achse des Zielsystems und des Gelenksystems der Variablen  $t_n$  identisch sind.

Jetzt zeigt sich ein weiterer Vorteil des zur Positionsbeschreibung von Geraden verwendeten Momentenvektors gegenüber dem Lotvektor. Denn während die Variable  $t_1$  in allen Komponenten des Lotvektors enthalten ist, ist der z-Wert der Momentenvektoren invariant gegen eine Bewegung  $t_1$  entlang der z-Achse des Bezugssystems. Dies wird deutlich bei der Betrachtung der dualen  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{ZC}_1$ .

$$\mathbf{ZC}_1 = \begin{bmatrix} \cos(d_1) - \varepsilon \cdot t_1 \cdot \sin(d_1) & -\sin(d_1) - \varepsilon \cdot t_1 \cdot \cos(d_1) & 0 \\ \sin(d_1) + \varepsilon \cdot t_1 \cdot \cos(d_1) & \cos(d_1) - \varepsilon \cdot t_1 \cdot \sin(d_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese Invarianz der z-Komponente des Momentenvektors gegen eine Verschiebung der Geraden in z-Richtung kann auch direkt bewiesen werden:

$$\mathbf{m} = \mathbf{l} \times \mathbf{o} = \mathbf{a} \times \mathbf{o} \quad (\text{vgl Abschnitt 1.1.3})$$

Bei einer in z-Richtung verschobenen Geraden gilt:

$$\mathbf{m}_{\text{neu}} = (a_x, a_y, a_z + z)^T \times \mathbf{o} \quad \text{und} \quad m_z = m_{z\text{neu}} = a_x \cdot o_y - a_y \cdot o_x \neq f(z)$$

Damit ist im Element 3.3 des obigen Ansatzes keine der vier Variablen  $d_1$ ,  $t_1$ ,  $d_n$  und  $t_n$  enthalten und dies führt wegen der beiden restlichen Gelenkvariablen  $d_i$  und  $d_j$  zu einer dualen Gleichung in zwei Unbekannten. Durch Aufspalten der dualen Gleichung in ihre Primär- und Sekundärgleichung und durch geeignetes Umformen, Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen wird versucht, eine Variable zu eliminieren und ein Lösungspolynom 4. Grades für die verbleibende Variable aufzustellen.

Um nachzuweisen, daß dies gelingt, werden alle in Frage kommenden Roboterkonstruktionen mit 2 Zylindergelenken und 2 Rotationsgelenken betrachtet und in folgenden vier Äquivalenzklassen zusammengefaßt:

$$I) \quad (d_1, t_1, l_1, \alpha_1) (d_2, h_2, l_2, \alpha_2) (d_3, t_3, l_3, \alpha_3) (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$$

$$II) \quad (d_1, t_1, l_1, \alpha_1) (d_2, h_2, l_2, \alpha_2) (d_3, h_3, l_3, \alpha_3) (d_4, t_4, l_4, \alpha_4)$$

$$IIIa) \quad (d_1, t_1, l_1, \alpha_1) (d_2, t_2, l_2, \alpha_2) (d_3, h_3, l_3, \alpha_3) (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$$

$$IIIb) \quad (d_1, t_1, l_1, \alpha_1) (d_2, t_2, l_2, \alpha_2) (d_3, h_3, l_3, \alpha_3) (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$$

Durch Invertierung der kinematischen Gleichung ergeben sich die für das Yang-Verfahren notwendigen Ansätze:

$$I) \quad \mathbf{ZC}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{ZR}_2 \cdot \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{ZC}_3 = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{ZR}_4)^{-1}$$

$$II) \quad \mathbf{ZC}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{ZR}_2 \cdot \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{ZR}_3 \cdot \mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{ZC}_4 = \mathbf{W}$$

$$IIIa) \quad \mathbf{ZC}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{ZC}_2 = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{ZR}_3 \cdot \mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{ZR}_4)^{-1}$$

$$IIIb) \quad \mathbf{ZC}_2 \cdot \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{ZC}_3 = (\mathbf{ZR}_1 \cdot \mathbf{X}_2)^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{ZR}_4)^{-1}$$

Im Fall I führt folgendes Vorgehen zum Ziel:

$$\begin{aligned} 3.3: & -\cos(d_2) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) \\ & + \varepsilon \cdot \{-\cos(d_2) \cdot \{\sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) \cdot l_2 + \cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot l_1\} \\ & \quad + \sin(d_2) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_2 - l_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) - l_2 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)\} = \\ & = \sin(\alpha_3) \cdot \{\sin(d_4) \cdot \mathbf{Wp}_{31} + \cos(d_4) \cdot \mathbf{Wp}_{32}\} + \cos(\alpha_3) \cdot \mathbf{Wp}_{33} \\ & + \varepsilon \cdot \{l_3 \cdot \cos(\alpha_3) \cdot \{\sin(d_4) \cdot \mathbf{Wp}_{31} + \cos(d_4) \cdot \mathbf{Wp}_{32}\} \\ & \quad + \sin(\alpha_3) \cdot \{\sin(d_4) \cdot \mathbf{Ws}_{31} + \cos(d_4) \cdot \mathbf{Ws}_{32}\} - l_3 \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \mathbf{Wp}_{33} + \cos(\alpha_3) \cdot \mathbf{Ws}_{33}\} \end{aligned}$$

Aus der Primärgleichung wird abgeleitet:  $\cos(d_2) = f(d_4) / \{-\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)\}$

Mit Abschnitt 2.3.8 Nr. 2 kann  $\sin(\alpha_1) \neq 0$  und  $\sin(\alpha_2) \neq 0$  vorausgesetzt werden.

Einsetzen von  $\cos(d_2) = f(d_4) / \{-\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)\}$  in die Sekundärgleichung und umformen zu  $\sin(d_2) = F(d_4) / \{\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_2\}$  eröffnet die Möglichkeit, durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen die Variable  $d_2$  zu eliminieren und das Lösungspolynom vierten Grades in  $x = \tan(d_4/2)$

$$1 = \{f(d_4)^2 \cdot h_2^2 + F(d_4)^2\} / \{\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot h_2\}^2$$

zu erhalten.

Interessant ist es nun auch zu untersuchen, wie die im Yang-Verfahren verwendete duale Einzelgleichung 3.3 aus einem Ansatz mit homogenen 4x4-Matrizen hergeleitet werden kann. Der Primärteil der dualen Einzelgleichung 3.3 ist identisch mit der Einzelgleichung

3.3 des Ansatzes mit homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen und die ebenfalls benötigte Sekundär-gleichung 3.3 ergibt sich aus dem homogenen Ansatz durch

$$H_{14} \cdot H_{23} - H_{24} \cdot H_{13} \quad (\text{vgl. Abschnitt 1.2.4})$$

Explizite Lösungsmethoden für II) und III) wurden in [Baumeister 86] untersucht; um geschlossenen Lösungsformeln zu ermöglichen, müssen diese Roboterklassen durch zusätzliche kinematische Vorgaben weiter eingeschränkt werden.

$$\text{II)} \quad (d_1, t_1, 0, 90^\circ) (d_2, h_2 \neq 0, 0, 90^\circ) (d_3, 0, l_3, \alpha_3) (d_4, t_4, l_4, \alpha_4)$$

$$\text{IIIa)} \quad (d_1, t_1, 0, 90^\circ) (d_2, t_2, 0, 90^\circ) (d_3, h_3, l_3, 90^\circ) (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$$

$$\text{IIIb)} \quad (d_1, h_1, 0, 90^\circ) (d_2, t_2, 0, 90^\circ) (d_3, t_3, l_3, 90^\circ) (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$$

Statt  $\alpha_i = 90^\circ$  ist auch  $\alpha_i = 270^\circ$  gestattet; dies entspricht der Wahl der entgegengesetzten Gelenkdreh- bzw. Gelenkschubrichtung im nachfolgenden Gelenk.

Eine weitere Roboterklasse, für die nach [Baumeister 86] und [Pieper 69] ein Lösungspolynom vom Grad vier hergeleitet werden kann, wird durch folgende D-H-Tupel beschrieben:

$$(d_1, h_1, 0, 90^\circ)(d_2, 0, l_2, -90^\circ)(d_3, 0, 0, 90^\circ)(d_4, 0, l_4, -90^\circ)(d_5, 0, 0, 90^\circ)(d_6, h_6, l_6, \alpha_6)$$

diese Konstruktion entspricht dreimal zwei sich schneidenden Rotationsgelenken mit den Zusatzbedingungen  $h_i = 0, \alpha_j = 90^\circ + \pi, 2 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$ .

Aufgrund der geringen praktischen Relevanz der letzten vier vorgestellten Roboterklassen wird hier auf eine Herleitung der Lösungspolynome und die Darstellung der Gradberechnung verzichtet; eine detaillierte Behandlung dieser Klassen ist bei den oben zitierten Autoren zu finden.

### 2.4.3 Vergleich der Lösungen mit Grad zwei und Grad vier

Zwei wesentliche Aspekte sind beim Vergleich zwischen den in Kapitel 2.3 und 2.4 vorgestellten Lösungsverfahren zu betrachten. Dies sind einerseits die Komplexität und die Anwendbarkeit der gewonnenen Lösungsformel, andererseits die Mächtigkeit der Verfahren in der Praxis.

Obwohl für Polynome vom Grad vier explizite Lösungsformeln existieren, ist ihr Einsatz aufgrund der hohen Komplexität und der Gefahr numerischer Ungenauigkeiten sehr umstritten. Eine ernstzunehmende Alternative bietet hier die Anwendung numerischer Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle dieses Polynoms, um dann mit dem bekannten Gelenkwert die restlichen Gelenkvariablen quadratisch zu berechnen. Degenerations- oder Reduktionsstellungen können schon am Verschwinden der Variablen aus der Polynomgleichung erkannt werden, die Analyse einer unerreichbaren Zielstellung anhand des Polynoms vierten Grades erweist sich jedoch als sehr komplex und aus dem numerischen,

linearisierten Verfahren läßt sich für unerreichbare Zielstellungen kein Kriterium ableiten. Der entscheidende Aspekt für den Einsatz numerischer Verfahren dürfte aber darin liegen, ob bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Konvergenz des Verfahrens für beliebig vorgegebene Zielstellungen garantiert und ob die willkürliche Auswahl *einer* Lösung (aus maximal vier möglichen Lösungen) für den jeweiligen Anwendungsfall toleriert werden kann. Dieser Fragenkomplex bietet noch ein weites Feld für zukünftige Untersuchungen, fraglich ist nur, ob der in Betracht kommende Einsatzbereich derartige Anstrengungen rechtfertigt. Dies führt uns zur Analyse der Bedeutung der jeweiligen Verfahren.

Alle bisher in größerem Umfang eingesetzten Industrieroboter weisen nur parallele oder orthogonale Gelenkübergänge auf. Diese Einschränkung garantiert zwar noch nicht die generelle Lösbarkeit der kinematischen Gleichung (vgl. VW-R30), doch führt dies zumindest für die überwiegende Mehrzahl aller Roboter zu geschlossenen Lösungen. Ein zweiter Grund für die Wahl orthogonaler Achsen liegt in dem Wunsch nach maximalen Arbeitsräumen. So existieren beispielsweise bei der orthogonalen Anordnung der drei Orientierungsgelenke keine unerreichbaren Orientierungsvorgaben, dagegen führen Abweichungen von dieser orthogonalen Ausrichtung der Gelenke stets zu Einbußen bei den erreichbaren Orientierungen eines Roboters (vgl. Abschnitt 2.3.2 und Satz 2.2.7 in [Heiß 85]).

Unter der Voraussetzung, daß  $\alpha_i \in \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$  für alle Gelenkübergänge eines Roboters gilt, wird die Menge der zusätzliche mit den in Abschnitt 2.4.1 und 2.4.2 beschriebenen Verfahren lösbarer kinematischen Gleichungen relativ klein.

Bei der im folgenden aufgeführten Liste der Roboterklassen, die auf nichtquadratisch lösbare kinematische Gleichungen führen, beschränken wir uns auf je einen Vertreter der durch Reihenfolgevertauschung zueinander paralleler Rotations- und Translationsgelenke und durch Invertierung der kinematischen Gleichung definierten Äquivalenzklassen.

Das in Abschnitt 2.4.1 vorgestellte Verfahren führt zu folgenden zusätzlichen Roboterklassen:

- 1)  $(d_1, h_1, l_1, \pm 90^\circ) (d_2, h_2, l_2, \pm 90^\circ) (d_3, h_3, l_3, \pm 90^\circ) (d_4, h_4, 0, \alpha_4) (d_5, 0, 0, \alpha_5) (d_6, h_6, l_6, \alpha_6)$   
 $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$
- 2)  $(d_1, h_1, l_1, \pm 90^\circ) (d_2, h_2, l_2, \pm 90^\circ) (d_3, h_3, 0, \alpha_3) (d_4, 0, 0, \alpha_4) (d_5, h_5, l_5, \alpha_5) (\delta_6, \eta_6, l_6, \alpha_6)$   
 $l_1 \neq 0$
- 3)  $(d_1, h_1, l_1, 0^\circ \text{ bzw. } 180^\circ) (\vartheta_2, t_2, l_2, \alpha_2) (d_3, h_3, 0, \alpha_3) (d_4, 0, 0, \alpha_4) (d_5, h_5, l_5, \alpha_5)$   
 $(d_6, h_6, l_6, \alpha_6)$

Die für das Yang-Verfahren am besten geeignete Roboterklasse  $C, R, C, R$

$$(d_1, t_1, l_1, \pm 90^\circ) (d_2, h_2, l_2, \pm 90^\circ) (d_3, t_3, l_3, \pm 90^\circ) (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$$

(äquivalent zu  $R, C, R, C$ ) aus Abschnitt 2.4.2 I muß, um nicht auf eine quadratisch lösbare kinematische Gleichung zu führen, folgende Eigenschaften aufweisen:

$$\sin(\alpha_i) \neq 0 \wedge h_2 \neq 0 \wedge l_3 \neq 0, 1 \leq i \leq 3.$$

Da durch die Gelenkvariable  $d_2$  die beiden Translationsachsen von  $t_1$  und  $t_3$  zueinander

parallel eingestellt werden können, legt diese Konstruktion eine ausgeprägte Anfälligkeit für Degenerationen an den Tag.

Von den oben weiter eingeschränkten Klassen II, IIIa und IIIb wird Klasse II mit  $\sin(\alpha_3)=0$  quadratisch lösbar (vgl. Abschnitt 2.3.8 Nr. 2), so daß alle in diesen drei Klassen aufgeführten Konstruktionen mit Lösungspolynom vom Grad vier maximal zwei frei wählbare Längenparameter  $h_i$  bzw.  $l_j$  besitzen, die nicht auf triviale Weise in die Zielvorgabe integrierbar sind, und somit allein von ihrem Umfang her kaum größere Bedeutung erlangen können.

Das sehr häufig ins Feld geführte Argument, Lösungspolynome vom Grad vier erhöhten aufgrund der größeren Lösungsvielfalt die Flexibilität eines Roboters [Roth 76], ist nicht stichhaltig. In der Regel führen diese Polynome nur für sehr wenige Zielstellungen zu *vier reellen* Lösungen oder aber es ergeben sich in der Folgeberechnung der restlichen Gelenkvariablen mehr eindeutige Lösungen als bei vergleichbaren Robotern mit quadratischen Bestimmungsgleichungen, so daß die Gesamtlösungsvielfalt nicht erhöht wird.

## 2.5 Berechnung der Gelenkgeschwindigkeit

Bevor in diesem Abschnitt auf die Möglichkeit eingegangen wird, wie neben der expliziten Lösung für die Gelenkvariablen auch Formeln für Berechnung der Gelenkgeschwindigkeiten und Gelenkbeschleunigungen gewonnen werden können, sollen zuerst die unterschiedlichen Formen von Zielvorgaben und die verschiedenen Arten von Bahnsteuerungen bei Robotern aus Benutzersicht betrachtet werden.

Wir unterscheiden bei der Zielvorgabe die kartesische Eingabe in Weltkoordinaten von der Eingabe in Gelenkkoordinaten. Die bisher vorgestellten Verfahren zur Vorwärts- und Rückwärtsrechnung bilden das Bindeglied zwischen diesen beiden Ebenen. Die Werte für die Gelenkkoordinaten stellen dann die Sollwertvorgabe für die unterlagerten Antriebsregelkreise dar, die dafür sorgen, daß die gewünschten Gelenkstellungen möglichst genau eingestellt werden.

Die Steuerungen von Robotern lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

### 1. Punkt-zu-Punkt-Steuerung

Vorgegeben wird nur die Zielstellung des Effektors in Gelenkkoordinaten oder in kartesischen Koordinaten. Erfolgt die Beschreibung der Zielstellung in kartesischen Koordinaten, so müssen mit Hilfe der Rückwärtsrechnung zuerst die Gelenkkoordinaten bestimmt werden. Auf welchem Weg der Effektor das Ziel erreicht bleibt undefiniert und wird damit von der Robotergeometrie und den unterlagerten Gelenkregelkreisen bestimmt. So können z. B. durch die Gelenkregelkreise alle Gelenke mit maximaler Geschwindigkeit bewegt werden, bis sie zu *verschiedenen* Zeiten ihre Endstellung erreicht haben. Die maximal zulässigen Gelenkgeschwindigkeiten hängen vom unterlagerten Regelkreis ab. Häufig wird ein rampenförmiges Geschwindigkeitsprofil beim Anfahren und Abbremsen definiert.

Eine solche Bewegungsart ist für viele Anwendungen wie z.B. Punktschweißen oder einfache Montagevorgänge durchaus ausreichend.

### 2. Bahnsteuerung

Hier wird neben der Zielstellung auch der (kartesische) Bahnverlauf vorgegeben. Da in diesem Fall die Bahn des betrachteten Objekts eine zwangsläufige Bewegung darstellt, kann die Stellung des Objektsystems (Gangsystem) über einen Parameter, in der Regel die Zeit  $t$ , definiert werden. Dem Anwender stehen folgende Möglichkeiten zur Bahndefinition zur Verfügung:

- a) Stützpunktvorgabe, d.h. Stellung im Zeitpunkt  $t_i$  und die Angabe einer Interpolationsvorschrift, z.B.:
  - lineare Interpolation in Gelenkkoordinaten; die Stellung wird durch Vorgabe der Gelenkwerte definiert und die Differenz zwischen Sollvorgabe und aktuellen Gelenkwerten wird durch eine lineare Gelenkbewegung ausgeglichen, so daß alle Gelenkbewegungen *gleichzeitig* enden.

- lineare Interpolation in kartesischen Koordinaten, das heißt, daß zwischen zwei Stützpunkten eine geradlinige Bewegung durchgeführt wird.
- lineare Interpolation mit Überschleifen an den Eckpunkten, das heißt, daß beim Übergang von einem Geradenstück in das nächste eine abgerundete Bewegung erfolgt.
- Kreisinterpolation, das heißt, daß zwischen drei vorgegebenen Stützpunkten eine kreisförmige Bewegung ausgeführt wird.
- Interpolation mit kubischen Splines, das heißt, daß praktisch beliebige Kurvenformen stückweise approximiert werden können. Hierbei ist auch eine Vorgabe von Bahngeschwindigkeiten und -beschleunigungen möglich.

b) Angabe einer Bahnfunktion

- Angabe einer kartesischen Bahnfunktion  $B(t)=\text{Ziel}(t)$ ;  $B(t)$  ist dabei eine mehrdimensionale Zeitfunktion  $F: t \rightarrow \mathcal{R}^n$  in Form einer der mathematischen Strukturen, die sich zur Stellungsbeschreibung eignen.
- Vorgabe einer expliziten Zeitfunktion  $v_i(t)$  für jedes Gelenk  $G_i$ :  
diese Variante wird üblicherweise vom Anwender nicht direkt benutzt, sondern resultiert aus der Rückwärtsrechnung, angewandt auf eine kartesisch vorgegebene Bahnfunktion  $B(t)$ . Denn sobald eine explizite Lösung – z.B.  $v_i=f_i(x,y,z,R1,R2,R3)$  oder  $v_i=f_i(W_{11},\dots,W_{34})$  – für die Gelenkvariable  $v_i$  existiert, entsteht durch Einsetzen der mit  $t$  parametrisierten kartesischen Bahnfunktion – im Beispiel  $(x(t),y(t),z(t),R1(t),R2(t),R3(t))$  oder  $(W_{11}(t),\dots,W_{34}(t))$  – die Zeitfunktion  $v_i(t)$  für das Gelenk  $G_i$ . Die Gelenkvariablen  $v_i(t)$  werden in der Praxis nur für diskrete Zeitpunkte berechnet und als Sollwerte an die unterlagerten Regelkreise gegeben. Dieser *Interpolationstakt*  $\Delta T$  liegt in der Größenordnung von wenigen Millisekunden.

Alle Interpolationsarten führen nach Auswertung der Interpolationsvorschrift ebenfalls auf (stückweise definierte) explizite Bahnfunktionen.

Nun kann natürlich zur Bahndefinition statt des Zeitparameters  $t$  auch ein anderer Parameter  $s$  verwendet werden. Dies stellt aber meistens nur einen Zwischenschritt dar, in dessen Folge dann eine geeignete Zeitfunktion  $s(t)$  für den Parameter  $s$  so bestimmt wird, daß z.B. ein vorgegebenes maximales Antriebsmoment beim Bahnfahren nicht überschritten wird [Pfeiffer 87]. Das Ergebnis ist dann wieder eine Bahn  $B(t)$  in Abhängigkeit vom Zeitparameter  $t$ .

Die Ansprüche an die oben angesprochenen Regelkreise sind sehr hoch. Das von ihnen bestimmte Bahnverhalten des Effektors soll einerseits möglichst hohe Bahngeschwindigkeiten zulassen, andererseits möglichst exakt, d.h. ohne Schleppfehler und ohne Überschwingen, den vorgegebenen Bahnverlauf einhalten. Dies ist insbesondere deshalb schwierig, weil sich die Parameter der Regelkreise in einem weiten Bereich nichtlinear

ändern. So ändern sich etwa die Massenträgheitsmomente der einzelnen Roboterelemente bezüglich ihrer Drehachse je nach Stellung um mehrere hundert Prozent. Daneben ist mit starken Lastwechseln, d.h. Bewegungen mit und ohne Last zu rechnen.

Dies führt unter anderem dazu, daß sich die Regelung nicht allein auf eine Zustandsgröße, nämlich die Lage des Gelenks, beschränken kann. Gelegentlich werden neben der Lage auch der Motorstrom und die Gelenkgeschwindigkeit in die Regelung einbezogen. Die Regler werden heute noch häufig teilweise analog und teilweise digital ausgeführt. Es gibt aber auch bereits Konzepte für eine vollständig digitale Regelung [Cevik 87]. Auf die Vielzahl der in der Forschung verfolgten Ansätze in diesem Bereich soll in diesem Rahmen nicht eingegangen werden.

In jedem Fall ist neben der Gelenkstellung  $v_i(t)$  die Gelenkgeschwindigkeit  $\dot{v}_i(t)$  eine wesentliche Zustandsgröße, die ebenfalls als Sollwert vorgegeben werden kann.

Diese Sollgeschwindigkeit  $\dot{v}_i(t)$  darf nicht verwechselt werden mit der in den meisten Reglern schon verwendeten Durchschnittsgeschwindigkeit  $\frac{\{v_i(t)-v_i(t-\Delta T)\}}{\Delta T}$ . Die Berücksichtigung der Sollgeschwindigkeit  $\dot{v}_i(t)$  macht den Regelalgorithmus natürlich komplexer und verlangt bei gleicher Taktzeit leistungsfähigerer Hardware.

Unter der Voraussetzung, daß die kartesische Bahn durch explizite Vorgabe oder durch Interpolation als Zeitfunktion  $B(t)$  vorliegt und für die Gelenkvariablen explizite Lösungsformeln existieren, stellt die Berechnung der Gelenkgeschwindigkeit kein Problem dar. Mit der Zeitfunktion  $B(t)$  der Bahn ist auch die Bahngeschwindigkeit  $\dot{B}(t)$  als Ableitung nach der Zeit bekannt. Aus den expliziten Lösungen für  $v_i$  werden durch Einsetzen von  $B(t)$  die Funktionen  $v_i(t)$  bestimmt. Mit den bekannten Differentiationsregeln läßt sich eine Zeitfunktion für den Geschwindigkeitsverlauf der einzelnen Gelenkbewegungen ableiten. Wahlweise kann dieses Ziel über das Lösungspolynom mittels impliziter oder über die explizite Lösung für  $v_i(t)$  mittels expliziter erreicht werden. Die implizite Differentiation setzt allerdings die Kenntnis der zum Zeitpunkt  $t$  benötigten Gelenkpositionen voraus, was keine Probleme aufwirft, wenn explizite Gleichungen für die  $v_i(t)$  vorliegen.

Betrachten wir zuerst die Möglichkeit der impliziten Differentiation.

Sei  $F(t,v)$  das Lösungspolynom mit der Zeitvariablen  $t$  und der Gelenkvariablen  $v$ , und  $v=f(t)$  die explizite Lösungsformel, dann gilt:

$$\partial F(t,v)/\partial t + \partial F(t,v)/\partial v \cdot \dot{f}(t) = 0$$

und für  $\partial F(t,v)/\partial v \neq 0$ :

$$\dot{f}(t) = - (\partial F(t,v)/\partial t) / (\partial F(t,v)/\partial v)$$

Die bei der expliziten Differentiation benötigte Ableitung der Funktion  $\text{ATAN2}(x,y)$  ist identisch mit der Ableitung der zugrundeliegenden Funktion  $\arctan(x/y)$ :

$$\partial \text{ATAN2}(x(t), y(t)) / \partial t = (y \cdot x' - x \cdot y') / (x^2 + y^2)$$

**Beispiel:**

Am Beispiel des im vorigen Abschnitt betrachteten Roboters GdA06 soll die Herleitung der Formel für die Gelenkgeschwindigkeit demonstriert werden; die Zeitvariable  $t$  wird zur besseren Übersichtlichkeit weggelassen. Für die nach Variante I in Abschnitt 2.3.7 bestimmten Gelenkvariablen ergibt sich somit folgender Geschwindigkeitsverlauf:

$$\dot{d}_1 = (W_{14} \cdot \dot{W}_{24} - W_{24} \cdot \dot{W}_{14}) / (W_{14}^2 + W_{24}^2) \quad \{\text{explizite Ableitung}\} \text{ oder}$$

$$\dot{d}_1 = -(\sin(d_1) \cdot \dot{W}_{14} - \cos(d_1) \cdot \dot{W}_{24}) / (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}) \quad \{\text{implizite Ableitung}\}$$

$$\dot{d}_3 = -(W_{14} \cdot \dot{W}_{14} + W_{24} \cdot \dot{W}_{24} + W_{34} \cdot \dot{W}_{34}) / (\pm h \cdot l \cdot \sqrt{1 - \sin^2(d_3)}) \quad \{\text{explizite Ableitung}\}$$

Das Vorzeichen im Nenner hängt von der aktuellen Position von  $d_3$  ab; sinnvollerweise wird  $\pm \sqrt{1 - \sin^2(d_3)}$  durch  $\cos(d_3)$  ersetzt, dies führt dann zur gleichen Form, die aus der impliziten Ableitung gewonnen werden könnte.

Für  $\dot{d}_2$  ergibt sich nach einigen Umformungen und Auswertung einiger aus Abschnitt 2.3.7 bekannter Zusammenhänge folgende Lösung:

$$\dot{d}_2 = \{-(\dot{W}_{14} \cdot \cos(d_1) + \dot{W}_{24} \cdot \sin(d_1)) \cdot W_{34} + \dot{W}_{34} \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}) - \dot{d}_3 \cdot (W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2 + h^2 - l^2) / 2\} / (W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2)$$

Mit den bei der Berechnung der Variablen  $d_4$  definierten Abkürzungen  $a$  und  $b$  gilt für  $\dot{d}_4$ :

$$\dot{d}_4 = (a \cdot \dot{b} - b \cdot \dot{a}) / (a^2 + b^2) \quad \{\text{explizite Ableitung}\}$$

$$\dot{d}_4 = -(\sin(d_4) \cdot \dot{a} - \cos(d_4) \cdot \dot{b}) / (a \cdot \cos(d_4) + b \cdot \sin(d_4)) \quad \{\text{implizite Ableitung}\}$$

Beide Formeln sind äquivalent, denn:  $\sin(d_4) = b / \pm \sqrt{a^2 + b^2}$      $\cos(d_4) = a / \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

Für die Gelenkgeschwindigkeiten  $\dot{d}_5$  und  $\dot{d}_6$  gilt folgende allgemeine Aussage:

Bei Gelenkvariablen  $d$ , die aus 2 Gleichungen eindeutig berechnet werden konnten und deshalb in der Form " $\sin(d)=a$ ,  $\cos(d)=b$ ,  $d=\text{ATAN2}(a,b)$ " vorliegen, führen explizite und implizite Ableitung zum gleichen Ergebnis:  $\dot{d} = b \cdot \dot{a} - a \cdot \dot{b}$ .

Denn wegen  $a^2 + b^2 = \sin^2(d) + \cos^2(d) = 1$  verschwindet in der expliziten Ableitung der Nenner.

Als Ansatz für die implizite Ableitung wird aus " $d=\text{ATAN2}(a,b)$ " die Gleichung " $0=b \cdot \sin(d) - a \cdot \cos(d)$ " entwickelt. Daraus ergibt sich nach den Regeln der impliziten Ableitung  $\dot{d} = -(\sin(d) \cdot \dot{b} - \cos(d) \cdot \dot{a}) / (b \cdot \cos(d) + a \cdot \sin(d))$  und dies führt wegen " $\sin(d)=a$ ,  $\cos(d)=b$ " ebenfalls zu  $\dot{d} = b \cdot \dot{a} - a \cdot \dot{b}$ .

Gerade die letzten Formeln haben sicher einen Eindruck davon vermittelt, welchen Vorteil einfache Lösungsgleichungen sowohl bei der Analyse der Ausnahmesituationen, als auch bei der Bestimmung der Gelenkgeschwindigkeiten bieten.

## 2.6 Inkrementelle Rückwärtsrechnung

Wie bereits erläutert, ist die kinematische Gleichung nicht für alle Roboter geschlossen lösbar, oder die z.B. aus einem Polynom vierten Grades gewonnenen Lösungsgleichungen sind so komplex, daß sie für explizite Berechnungen nicht brauchbar sind. In diesen Fällen müssen numerische Verfahren zur Bestimmung der Gelenkvariablen gefunden werden. Eine Möglichkeit, die Nullstellen des Lösungspolynoms mit Hilfe der üblichen numerischen Verfahren zu bestimmen, haben wir im Abschnitt 2.4.3 erwähnt. Von größerer praktischer Bedeutung ist jedoch das in diesem Kapitel behandelte Verfahren der inkrementellen Rückwärtsrechnung, das direkt an der kinematischen Grundgleichung ansetzt. Das Prinzip dieses Verfahrens liegt darin, die aus der Vorwärtsrechnung gewonnene transzendente Roboterfunktion  $F(v_1, \dots, v_n)$  zu linearisieren. Mit Hilfe dieser linearisierten Funktion kann, ausgehend von einer aktuellen Stellung der Roboter Gelenke, näherungsweise eine dicht benachbarte Stellung berechnet werden, die durch kleine Inkremente der Gelenkvariablen erreicht wird. Da dieser Zusammenhang zwischen Gelenkvariablen und Stellung linear ist, können auf einfache Weise aus den linearen Gleichungssystemen die Gelenkinkremente bestimmt werden. Diese Näherung ist natürlich nur für kleine Inkremente gültig. Deshalb müssen zur Berechnung weiter entfernter Stellungen genügend viele Interpolationsstellungen zwischen der aktuellen Stellung und der Zielstellung herangezogen werden.

Trotz dieser eng benachbarten Interpolationsstellung treten Linearisierungsfehler auf. Das bedeutet, daß mit den näherungsweise bestimmten Inkrementen der Gelenkvariablen nicht genau die nächste Interpolationsstellung erreicht wird. Um eine Fortpflanzung dieser zu vermeiden, muß daher die tatsächlich erreichte Interpolationsstellung mit Hilfe der nichtlinearisierten Roboterfunktion  $F(v_1, \dots, v_n)$  berechnet werden. Diese tatsächliche Stellung wird dann als Ausgangsstellung für die Bestimmung der nächsten Inkremente gewählt.

Im folgenden betrachten wir zuerst die Linearisierung der Roboterfunktion und beschäftigen uns dann mit den Problemen, die bei der Lösung des linearen Gleichungssystems auftreten.

### 2.6.1 Linearisierung der Roboterfunktion $F(v_1, \dots, v_n)$

Gegeben sei eine aktuelle Roboterstellung  $A$  mit den zugehörigen aktuellen Gelenkeinstellungen  $v^A$  und eine gewünschte Zielstellung  $Z$ ; weiterhin ist die aus der jeweiligen Roboterkonstruktion resultierende Roboterfunktion bekannt:

$$F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (Z_i \cdot X_{i+1}) \cdot Z_n$$

Gelenkänderungen, die zum Einstellen der Zielvorgabe  $\mathbf{Z}$  durchgeführt werden, lassen sich durch die Transformation  $\mathbf{Zdiff}(dv_i)$  beschreiben und führen zu folgender Roboterfunktion, in der die  $\mathbf{Z}_i$  die Variablenwerte  $\mathbf{v}_i^A$  enthalten und  $\mathbf{v}^{neu} = \mathbf{v}^A + d\mathbf{v}$  gilt:

$$F(\mathbf{v}_1^{neu}, \dots, \mathbf{v}_n^{neu}) = \prod_{i=1}^{n-1} (\mathbf{Zdiff}(dv_i) \cdot \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{Zdiff}(dv_n) \cdot \mathbf{Z}_n$$

Um nun zur inkrementellen Betrachtungsweise zu kommen, werden die Transformationen  $\mathbf{Zdiff}(dv_i)$  additiv aufgespalten in das dem jeweils verwendeten Ring der homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen, der dualen  $3 \times 3$ -Matrizen bzw. der dualen Quaternionen zugrundeliegende Element  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{I}^{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{I}^{3 \times 3}$  bzw.  $(1, 0, 0, 0)$ ) und das Element  $\Delta_i$ :

$$\mathbf{Zdiff}(dv_i) = \mathbf{E} + \Delta_i$$

Der sechsdimensionale Beschreibungsvektor kommt aufgrund der multiplikativen Verknüpfung von  $\mathbf{Zdiff}(dv_i) \cdot \mathbf{Z}_i$  für diese Überlegungen nicht in Frage.

$\Delta_i$  ist *keine Stellungsbeschreibung* mehr, da es die in allen drei Darstellungsformen bestehenden Normiertheitsbedingungen verletzt.  $\Delta_i$  hat, abhängig von der gewählten Darstellungsform, folgendes Aussehen, wobei  $dd_i$  bzw.  $dt_i$  die jeweilige Gelenkänderung  $dv_i$  beschreiben:

a) homogene  $4 \times 4$ -Matrix:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \cos(dd_i) - 1 & -\sin(dd_i) & 0 & 0 \\ \sin(dd_i) & \cos(dd_i) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dt_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) duale  $3 \times 3$ -Matrix:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \cos(dd_i) - \varepsilon \cdot dt_i \cdot \sin(dd_i) - 1 & -\sin(dd_i) - \varepsilon \cdot dt_i \cdot \cos(dd_i) & 0 \\ \sin(dd_i) + \varepsilon \cdot dt_i \cdot \cos(dd_i) & \cos(dd_i) - \varepsilon \cdot dt_i \cdot \sin(dd_i) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) duale Quaternion:

$$\Delta_i = (\cos(dd_i/2) - \varepsilon \cdot dt_i/2 \cdot \sin(dd_i/2) - 1; 0; 0; \sin(dd_i/2) + \varepsilon \cdot dt_i/2 \cdot \cos(dd_i/2))$$

wobei  $dt_i = 0$ , falls Gelenk  $i$  ein Rotationsgelenk,  
und  $dd_i = 0$ , falls Gelenk  $i$  ein Translationsgelenk ist.

Durch Einsetzen von  $\mathbf{E} + \Delta_i$  in die Roboterfunktion  $F(\mathbf{v}_1^{neu}, \dots, \mathbf{v}_n^{neu})$  und Ausmultiplizieren läßt sich  $F$  umformen zu

$$\begin{aligned}
 F(v_1^{\text{neu}}, \dots, v_n^{\text{neu}}) &= \prod_{i=1}^{n-1} ((\mathbf{E} + \Delta_i) \cdot \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot (\mathbf{E} + \Delta_n) \cdot \mathbf{Z}_n = \\
 &= \prod_{i=1}^{n-1} ((\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) + (\Delta_i \cdot \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1})) \cdot \mathbf{Z}_n + \prod_{i=1}^{n-1} ((\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) + (\Delta_i \cdot \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1})) \cdot \Delta_n \cdot \mathbf{Z}_n
 \end{aligned}$$

Für die exakte Beschreibung der inkrementellen Stellungsänderung von  $\mathbf{A}$  nach  $\mathbf{Z}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z} - \mathbf{A} &= F(v_1^{\text{neu}}, \dots, v_n^{\text{neu}}) - F(v_1^{\mathbf{A}}, \dots, v_n^{\mathbf{A}}) = \\
 &= \prod_{i=1}^{n-1} ((\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) + (\Delta_i \cdot \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1})) \cdot (\mathbf{Z}_n + \Delta_n \cdot \mathbf{Z}_n) - \prod_{i=1}^{n-1} (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{Z}_n
 \end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck ausmultipliziert, so ergibt sich für die inkrementelle Stellungsänderung  $\mathbf{Z} - \mathbf{A}$  ein Summenterm  $S = \sum_{j=1}^{2^n - 1} S_j$ , bei dem jeder Summand  $S_j$  ein Produkt mit mindestens einem Faktor  $\Delta_i$  darstellt.

Machen wir jetzt davon Gebrauch, daß die Gelenkänderungen nur sehr klein sind, dann können wir folgende Näherungen benutzen:

1.  $\sin(\Delta_i) \approx \Delta_i$  und  $\cos(\Delta_i) \approx 1$  bzw.  $\sin(\Delta_i/2) \approx \Delta_i/2$  und  $\cos(\Delta_i/2) \approx 1$   
Damit verschwinden im Fall der Rotationsgelenke die transzendenten Funktionen in den  $\Delta_i$  und es kann sowohl für Rotations- als auch für Translationsgelenke die Näherung  

$$\Delta_i \approx \mathbf{D} \cdot dv_i$$
benutzt werden.
2. Produkte, die von höherer Ordnung klein sind, d.h. mehr als ein  $dv_i$  enthalten, werden vernachlässigt.

$$F(v_1^{\text{neu}}, \dots, v_n^{\text{neu}}) \approx \prod_{i=1}^{n-1} (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{Z}_n + \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{D} \cdot \prod_{i=j}^{n-1} (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{Z}_n \cdot dv_j$$

Hierbei gilt für eine

a) homogene 4×4-Matrix:

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} \text{falls Rotationsgelenk} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} \text{falls Translationsgelenk} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

b) duale 3×3-Matrix:

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} \text{falls Rotationsgelenk} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} \text{falls Translationsgelenk} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \cdot \varepsilon & 0 \\ 1 \cdot \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

c) duale Quaternion:

$$\mathbf{D} = (0, 0, 0, 1/2)$$

$$\mathbf{D} = (0, 0, 0, \varepsilon/2)$$

In obiger Näherung gibt der Summenterm die Auswirkung der inkrementellen Gelenkbewegung  $dv_i$  auf die Stellung des Effektors wieder; die Abschätzungen ermöglichen es, die Auswirkung der inkrementellen Bewegungen  $dv_i$  der Robotergelenke durch ein lineares Gleichungssystem bezüglich der Gelenkinkremente  $dv_i$  zu beschreiben.

Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}_i = \partial \mathbf{Z}_i / \partial v_i$$

Wird eine  $m$ -wertige Funktion  $F$  nach all ihren  $n$  Variablen  $v_i$  abgeleitet und werden die Terme  $\partial F / \partial v_i$  zu einer  $m \times n$ -Matrix zusammengefaßt, so wird diese dem vollständigen Differential der Funktion  $F$  zugrundeliegende Matrix auch als *Jacobi-Matrix*  $\mathbf{J}(F)$  bezeichnet.

Mit der Abkürzung

$${}^{(i)}\dot{f}_{jk} = \frac{\partial f_{jk}}{\partial v_i}$$

hat die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(F)$  je nach Darstellungsart folgende Struktur:

a) homogene 4×4-Matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} (1)\dot{\mathbf{f}}_{11} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{11} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{11} \\ (1)\dot{\mathbf{f}}_{12} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{12} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1)\dot{\mathbf{f}}_{44} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{44} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{44} \end{bmatrix}$$

b) duale 3×3-Matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} (1)\dot{\mathbf{f}}_{11\text{primär}} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{11\text{primär}} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{11\text{primär}} \\ (1)\dot{\mathbf{f}}_{12\text{primär}} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{12\text{primär}} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{12\text{primär}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1)\dot{\mathbf{f}}_{33\text{sekundär}} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{33\text{sekundär}} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{33\text{sekundär}} \end{bmatrix}$$

c) duale Quaternion

$$\mathbf{J}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} (1)\dot{\mathbf{f}}_{1\text{primär}} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{1\text{primär}} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{1\text{primär}} \\ (1)\dot{\mathbf{f}}_{2\text{primär}} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{2\text{primär}} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{2\text{primär}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1)\dot{\mathbf{f}}_{4\text{sekundär}} & (2)\dot{\mathbf{f}}_{4\text{sekundär}} & \dots & (n)\dot{\mathbf{f}}_{4\text{sekundär}} \end{bmatrix}$$

Damit läßt sich das lineare System zur Beschreibung der inkrementellen Bewegung darstellen als

$$\mathbf{J}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{v},$$

denn die Matrixprodukte in den n Summanden entsprechen den partiellen Ableitungen von  $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{Z}_n$  nach  $\mathbf{v}_i$  an der Stelle  $\mathbf{v}^A$ .

Damit gilt:

$$F(\mathbf{v}_1^{\text{neu}}, \dots, \mathbf{v}_n^{\text{neu}}) - F(\mathbf{v}_1^A, \dots, \mathbf{v}_n^A) + \mathbf{J}(\mathbf{F}) \Big|_{(\mathbf{v}_1^A, \dots, \mathbf{v}_n^A)} \cdot d\mathbf{v}$$

## 2.6.2 Bestimmung der Gelenkvariablen aus einem linearen Gleichungssystem

Zur Bestimmung der Gelenkinkremente  $\mathbf{d}\mathbf{v}$  wird ein lineares Gleichungssystem folgendermaßen hergeleitet:

Aus der aktuellen Stellung  $\mathbf{A}$  und der Zielstellung  $\mathbf{Z}$  wird die Differenz  $\Delta\mathbf{Z} = \mathbf{Z} - \mathbf{A}$  gebildet;  $\Delta\mathbf{Z}$  ist ebenso wie  $\Delta_i$  keine Stellungsbeschreibung.

Da wir bei der Linearisierung der Roboterfunktion von den zu  $\mathbf{Z}_1$  bzw.  $\mathbf{Z}_n$  zugeordneten Bezugssystemen ausgegangen sind und die vollständige kinematische Gleichung

$$\prod_{i=0}^n (\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}) \cdot \mathbf{TR} = \mathbf{Ziel}$$

lauten kann (vgl. Abschnitt 2.2), muß die aktuelle Stellung  $\mathbf{A}$  und die Zielvorgabe  $\mathbf{Z}$  durch konstante Transformationen an die linearisierte Roboterfunktion angeglichen werden. Dieses modifizierte Inkrement wird in Analogie zur Rückwärtsrechnung in Abschnitt 2.2 mit  $\Delta\mathbf{W}$  bezeichnet.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{W} &= \mathbf{W}^{\text{neu}} - \mathbf{W} = (\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{X}_1)^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{X}_{n+1} \cdot \mathbf{TR})^{-1} - (\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{X}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X}_{n+1} \cdot \mathbf{TR})^{-1} = \\ &= (\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{X}_1)^{-1} \cdot \Delta\mathbf{Z} \cdot (\mathbf{X}_{n+1} \cdot \mathbf{TR})^{-1} \end{aligned}$$

Dann läßt sich für den Vektor der Gelenkvariablen  $\mathbf{v}^{\text{neu}}$  die kinematische Gleichung  $F(\mathbf{v}_1^{\text{neu}}, \dots, \mathbf{v}_n^{\text{neu}}) = \mathbf{W}^{\text{neu}}$  aufstellen und unter Verwendung der in 2.5.1 hergeleiteten Abschätzungen umformen zu

$$F(\mathbf{v}_1^A, \dots, \mathbf{v}_n^A) + \mathbf{J}(F)|_{(\mathbf{v}_1^A, \dots, \mathbf{v}_n^A)} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} - \mathbf{W}^{\text{neu}} (= \mathbf{W} + \Delta\mathbf{W})$$

Da  $F(\mathbf{v}_1^A, \dots, \mathbf{v}_n^A) = \mathbf{W}$  gilt, steht mit  $\mathbf{v}^{\text{neu}} = \mathbf{v}^A + \mathbf{d}\mathbf{v}$  und  $\mathbf{J}(F)|_{(\mathbf{v}_1^A, \dots, \mathbf{v}_n^A)} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} = \Delta\mathbf{W}$  ein lineares

Gleichungssystem zur näherungsweise Berechnung von  $\mathbf{v}^{\text{neu}}$ , der zur Zielstellung  $\mathbf{W}^{\text{neu}}$  bzw.  $\mathbf{Z}$  gehörenden Gelenkeinstellung, zur Verfügung.

Da für n-achsige Roboter maximal sechs Gelenkvariablen aus der kinematischen Gleichung bestimmt werden können, die Jacobi-Matrix jedoch je nach Darstellungsform die Dimension  $16 \times n$  (homogene  $4 \times 4$ -Matrix),  $18 \times n$  (duale  $3 \times 3$ -Matrix) oder  $8 \times n$  (duale Quaternion) aufweist, ist das vorliegende lineare Gleichungssystem überbestimmt. Diese Überbestimmtheit resultiert aus den Abschätzungsfehlern, die die in der kinematischen Gleichung bestehenden Abhängigkeiten einzelner skalarer Gleichungen zerstören.

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $m \times n$ -Matrix mit  $m > n$ , so kann für das überbestimmte Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ein optimaler Lösungsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  aus dem Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$$

ermittelt werden. Optimal bedeutet hier, daß die euklidische Norm des Residuumsvektors  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|$  minimal wird [Reinsch 74]. Dieses Gleichungssystem ist nicht mehr überbestimmt, da  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  ja gerade eine quadratische  $n \times n$ -Matrix darstellt.

Offen bleibt im Zusammenhang mit der Multiplikation der transponierten Matrix allerdings die Frage, ob dies ein der Problematik adäquates Vorgehen darstellt, d.h. ob die eigentlich bestehenden Abhängigkeiten durch diese Transformation in das System eingebracht werden und dadurch z.B. eine Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  gefunden wird, bei der der Residuumsvektor  $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  gleich Null wird, oder ob ein für den Problembereich ungeeignetes Werkzeug in rein formaler Weise eingesetzt wurde, das neben der Erhöhung des Rechenaufwandes u.U. sogar die Abschätzungsfehler vergrößert. Den Autoren ist nicht bekannt, daß dieses Verfahren im Zusammenhang mit der Rückwärtsrechnung näher untersucht oder in der Praxis eingesetzt worden wäre; dies ist vermutlich auf den hohen Rechenaufwand und die Existenz von einfacheren Vorgehensweisen zurückzuführen.

Ebenso könnten wir auf der Suche nach einem nicht überbestimmten Gleichungssystem auf den sechsdimensionalen Beschreibungsvektor zurückgreifen. Dazu muß, nachdem die Roboterfunktion auf gezeigte Weise berechnet wurde, diese in die sechsdimensionale Beschreibung umgerechnet und aus dieser durch Differentiation die Jacobi-Matrix mit der Dimension  $6 \times 6$  (für einen sechsachsigen Roboter) gewonnen werden. Allerdings dürfte der zur Bestimmung dieses linearen Gleichungssystems notwendige Berechnungsaufwand in der Regel beträchtlich sein.

Die beiden zuletzt angesprochenen Aspekte wurden vor allem deshalb nicht weiter untersucht, weil durch das im folgenden geschilderte Vorgehen das Problem der Überbestimmtheit wesentlich eleganter umgangen werden kann [Paul 81c].

Dazu wird das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{J}(\mathbf{F})|_{(v_1^A, \dots, v_n^A)} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{W}$

bzw. die äquivalenten Darstellungen

$$\sum_{i=1}^n \check{Z}_i / \check{Z}_{v_i} |_{(v_1^A, \dots, v_n^A)} \cdot dv_i = \mathbf{W}$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} (\mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{X}_{j+1}) \right) \cdot \check{Z}_i / \check{Z}_{v_i} \cdot \prod_{j=i+1}^n (\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{Z}_j) \cdot dv_i = \mathbf{W}$$

von rechts oder von links mit der aktuellen Stellungsbeschreibung  $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{F}(v_1^A, \dots, v_n^A)^{-1} = (\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{Z}_n)^{-1}$  multipliziert.

Mit  $U_i := \prod_{j=1}^{i-1} (Z_j \cdot X_{j+1})$  und  $Q_i := \prod_{j=i}^{n-1} (Z_j \cdot X_{j+1}) \cdot Z_n$  erhalten wir die zwei Gleichungsversionen

$$I) \sum_{i=1}^n (U_i \cdot D \cdot U_i^{-1}) \cdot dv_i = {}^2 W \cdot W^{-1}$$

$$II) \sum_{i=1}^n (Q_i^{-1} \cdot D \cdot Q_i) \cdot dv_i = W^{-1} \cdot {}^2 W \quad [\text{Paul 81c}]$$

Ausmultiplizieren von  $U_i \cdot D \cdot U_i^{-1}$  bzw.  $Q_i^{-1} \cdot D \cdot Q_i$  liefert mit den Bezeichnungen  ${}^i u_{lk}$  für  $U_i[l,k]$  bzw.  ${}^i q_{lk}$  für  $Q_i[l,k]$  und bei dualen Quaternionen  ${}^i u_j$  für  $U_i[j]$  bzw.  ${}^i q_j$  für  $Q_i[j]$ :

a) in homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen:

falls Gelenk  $i$  ein Translationsgelenk ist

$$U_i \cdot D \cdot U_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^i u_{13} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i u_{23} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i u_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_i^{-1} \cdot D \cdot Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^i q_{31} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i q_{32} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i q_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

falls Gelenk  $i$  ein Rotationsgelenk ist

$$U_i \cdot D \cdot U_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i u_{33} & {}^i u_{23} & X \\ {}^i u_{33} & 0 & -{}^i u_{13} & Y \\ -{}^i u_{23} & {}^i u_{13} & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei

$$X = {}^i u_{24} \cdot {}^i u_{33} - {}^i u_{34} \cdot {}^i u_{23}$$

$$Y = {}^i u_{34} \cdot {}^i u_{13} - {}^i u_{14} \cdot {}^i u_{33}$$

$$Z = {}^i u_{14} \cdot {}^i u_{23} - {}^i u_{24} \cdot {}^i u_{13}$$

$$\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i q_{33} & {}^i q_{32} & X \\ {}^i q_{33} & 0 & -{}^i q_{31} & Y \\ -{}^i q_{32} & {}^i q_{31} & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad X &= {}^i q_{14} \cdot {}^i q_{21} - {}^i q_{24} \cdot {}^i q_{11} \\ Y &= {}^i q_{14} \cdot {}^i q_{22} - {}^i q_{24} \cdot {}^i q_{12} \\ Z &= {}^i q_{14} \cdot {}^i q_{23} - {}^i q_{24} \cdot {}^i q_{13} \end{aligned}$$

In der Variante I (Multiplikation mit der Matrix  $\mathbf{W}^{-1}$  von rechts) beschreibt  $\mathbf{U}_i$  die Stellung des Gelenksystems  $S_i$  hinsichtlich des Bezugssystems BKS. Bezeichnet  $\mathbf{p}_i$  den Vektor vom Ursprung des Systems BKS zum Ursprung des Systems  $S_i$ , dann gilt:

$$(X, Y, Z)^T = (\mathbf{p}_i \times \mathbf{z}_i).$$

Diese Schreibweise ist aber identisch mit dem aus Abschnitt 1.1.3 bekannten Moment der Gerade  $\mathbf{z}_i$ . Damit wird auch klar, wie die entsprechende Darstellung als duale  $3 \times 3$ -Matrix aussieht: der Primärteil einer dualen  $3 \times 3$ -Matrix ist identisch mit der  $3 \times 3$ -Orientierungsmatrix der zugehörigen  $4 \times 4$ -Matrix. Der Sekundärteil der dualen Matrix enthält mit  $({}^i u_{13}, {}^i u_{23}, {}^i u_{33})^T$  genau den Momentenvektor der Geraden  $\mathbf{z}_i$ .

b) in dualen  $3 \times 3$ -Matrizen:

$$\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i u_{33} & {}^i u_{23} \\ {}^i u_{33} & 0 & -{}^i u_{13} \\ -{}^i u_{23} & {}^i u_{13} & 0 \end{bmatrix} \cdot f$$

$$\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i q_{33} & {}^i q_{32} \\ {}^i q_{33} & 0 & -{}^i q_{31} \\ -{}^i q_{32} & {}^i q_{31} & 0 \end{bmatrix} \cdot f$$

wobei  $f = \varepsilon$  falls Gelenk  $i$  ein Translationsgelenk und  
 $f = 1$  falls Gelenk  $i$  ein Rotationsgelenk ist

c) in dualen Quaternionen:

$$\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i^{-1} = (0, {}^i u_1 \cdot {}^i u_3 + {}^i u_2 \cdot {}^i u_4, {}^i u_3 \cdot {}^i u_4 - {}^i u_1 \cdot {}^i u_2, 1/2 \cdot ({}^i u_2^2 - {}^i u_3^2)) \cdot f$$

$$\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i = (0, -{}^i q_1 \cdot {}^i q_3 + {}^i q_2 \cdot {}^i q_4, {}^i q_3 \cdot {}^i q_4 + {}^i q_1 \cdot {}^i q_2, 1/2 \cdot ({}^i q_2^2 - {}^i q_3^2)) \cdot f$$

wobei  $f = \varepsilon$  falls Gelenk  $i$  ein Translationsgelenk und  
 $f = 1$  falls Gelenk  $i$  ein Rotationsgelenk ist

Die oben ermittelten Elemente von  $\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i^{-1}$  bzw.  $\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i$  ergeben die einzelnen Spalten  $k_{i\bullet}$  der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}$  des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{b}$ . Dies wird im folgenden für einen Roboter mit sechs Rotationsgelenken unter Verwendung homogener  $4 \times 4$ -Matrizen für die Variante II ( $\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i$ ), die sich numerisch als geringfügig günstiger im Vergleich zur Variante I erwiesen hat [Deuter 88], dargestellt:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 {}^1q_{33} & {}^2q_{33} & {}^3q_{33} & {}^4q_{33} & {}^5q_{33} & {}^6q_{33} \\
 -{}^1q_{32} & -{}^2q_{32} & -{}^3q_{32} & -{}^4q_{32} & -{}^5q_{32} & -{}^6q_{32} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -{}^1q_{33} & -{}^2q_{33} & -{}^3q_{33} & -{}^4q_{33} & -{}^5q_{33} & -{}^6q_{33} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 {}^1q_{31} & {}^2q_{31} & {}^3q_{31} & {}^4q_{31} & {}^5q_{31} & {}^6q_{31} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 {}^1q_{32} & {}^2q_{32} & {}^3q_{32} & {}^4q_{32} & {}^5q_{32} & {}^6q_{32} \\
 -{}^1q_{31} & -{}^2q_{31} & -{}^3q_{31} & -{}^4q_{31} & -{}^5q_{31} & -{}^6q_{31} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 {}^1X & {}^2X & {}^3X & {}^4X & {}^5X & {}^6X \\
 {}^1Y & {}^2Y & {}^3Y & {}^4Y & {}^5Y & {}^6Y \\
 {}^1Z & {}^2Z & {}^3Z & {}^4Z & {}^5Z & {}^6Z \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot d\mathbf{v} =
 \begin{bmatrix}
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{11} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{21} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{31} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{41} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{12} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{22} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{32} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{42} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{13} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{23} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{33} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{43} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{14} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{24} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{34} \\
 (W^{-1} \cdot {}^2 W)_{44}
 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$ 
 $\mathbf{b}$

Eine Betrachtung der Struktur von  $\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i^{-1}$  bzw.  $\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i$  macht sofort klar, daß einige Zeilen dieser Matrix  $\mathbf{K}$  gleich  $(0, \dots, 0)$  oder linear abhängig von anderen Zeilen sind (z.B. Element 2.1 und Element 1.2), so daß unter Berücksichtigung der Aufspaltungsmöglichkeit in Primär- und Sekundärteil bei dualen Zahlen in allen drei Beschreibungs-

formen nur maximal sechs Zeilen linear unabhängig sind. Damit wird z.B. im Fall a) durch die Auswahl der zu den Elementen 3.2, 1.3, 2.1, 1.4, 2.4, 3.4 gehörenden Zeilen der Matrix  $\mathbf{K}$  ein quadratisches, lineares Gleichungssystem  $\mathbf{K}' \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{b}'$  zur Berechnung der gesuchten Variablen  $d\mathbf{v}$  bestimmt, das darüberhinaus nur noch auf Transformationsmatrizen der einzelnen Gelenksysteme  $S_i$  basiert und somit keine Ableitung der Roboterfunktion erfordert.

Nachdem wir bisher dem Vektor  $\mathbf{b}$  kaum Beachtung geschenkt haben, wollen wir ihn jetzt etwas genauer betrachten. Im Gegensatz zur Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}$ , die durch die Linearisierung Ungenauigkeiten enthält, beschreibt der Vektor  $\mathbf{b}$  die exakten Stellungsinkremente von  $\Delta\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1}$  bzw.  $\mathbf{W}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{W}$ . Soll nun das Gleichungssystem keine unlösbaren Widersprüche enthalten, so muß  $\Delta\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1}$  bzw.  $\mathbf{W}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{W}$  die gleiche Struktur wie  $\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i^{-1}$  bzw.  $\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i$  aufweisen. Dies bedeutet, daß zu allen mit  $(0, \dots, 0)$  besetzten Zeilen der Matrix  $\mathbf{K}$  ein  $b_i = 0$  gehören muß und daß für Zeilen  $z_{i\bullet}$  und  $z_{j\bullet}$ , die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, ebenfalls  $b_i = -b_j$  gelten muß. Daß dies für *kleine Inkremente*  $\Delta\mathbf{W}$  der Fall ist, wird nach den folgenden beiden Bemerkungen gezeigt.

Sehr hilfreich für die Abschätzung der durch die Linearisierungsfehler verursachten Bahnabweichungen wäre eine Korrelation zwischen Bahnabweichung und Abweichung des vorgegebenen, exakten  $\mathbf{b}$  von der in  $\mathbf{K}$  vorliegenden Struktur, die bestimmt ist durch die Nullzeilen und Zeilen  $z_{i\bullet}$  und  $z_{j\bullet}$ , die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Daß diese Korrelation nicht gegeben ist, läßt sich durch die Tatsache erklären, daß in  $\mathbf{b}$  keinerlei Information über das kinematische Verhalten des Roboters enthalten ist, und an einem Beispiel klar darlegen:

Bei Verwendung homogener  $4 \times 4$ -Matrizen und bei vorgegebenem  $\Delta\mathbf{W}$ , das an der Position 1.4 einen sehr großen Wert  $T$  aufweist und sonst Null ist, ergibt sich eine Matrix  $\mathbf{W}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{W}$  bzw.  $\Delta\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1}$ , die nur in den Elementen 1.4, 2.4 und 3.4 bzw. in 1.4 von Null verschieden ist und damit exakt der in  $\mathbf{K}$  existierenden Struktur genügt. Für einen Roboter mit 6 Rotationsgelenken treten jedoch bei großen Werten von  $T$  erhebliche Bahnabweichungen auf, da die durch  $T$  festgelegte Zielstellung nicht mehr dicht an der aktuellen Stellung liegt, und so die durch die Abschätzungen der Rotationsvariablen im Verfahren auftretenden Linearisierungsfehler nicht klein gehalten werden können. Damit liegt der Schluß nahe, daß die Forderung nach geringfügigen Strukturabweichungen in  $\mathbf{b}$  zwar eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für einen in vorgegebenem Rahmen exakten Bahnverlauf ist.

Die in  $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{v} = \sum (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i^{-1}) \cdot dv_i$  bzw.  $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{v} = \sum (\mathbf{Q}_i^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_i) \cdot dv_i$  auftretenden linearen Abhängigkeiten sind keine direkte Folge der bei Stellungsbeschreibungen existierenden Abhängigkeiten aufgrund der Orthonormalbedingungen, sondern resultieren aus den bei der Linearisierung durchgeführten Abschätzungen und aus der geschickten Multiplikation mit  $\mathbf{W}^{-1}$ . Dies wird deutlich durch einen Vergleich mit  $\mathbf{b}$ , das diese von der Matrix  $\mathbf{K}$  erzeugte Struktur nicht immer aufweist.

### Strukturelle Ähnlichkeit von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{K}$ bei differentiell kleinem Inkrement $\Delta\mathbf{W}$

$\mathbf{W}^{\text{neu}}$  läßt sich als Produkt zweier Stellungsbeschreibungen darstellen,  $\mathbf{W}^{\text{neu}} = \mathbf{BKS} \mathbf{Diff} \cdot \mathbf{W}$  bzw.  $\mathbf{W}^{\text{neu}} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \mathbf{Diff}$ , wobei  $\mathbf{BKS} \mathbf{Diff}$  bzw.  $\mathbf{W} \mathbf{Diff}$  eine Stellungsbeschreibung mit sehr kleinem Transformationsverhalten ist.  $\mathbf{BKS} \mathbf{Diff}$  und  $\mathbf{W} \mathbf{Diff}$  unterscheiden sich in der Regel deutlich voneinander. Hiermit gilt:

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{W}^{\text{neu}} \cdot \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{BKS} \mathbf{Diff} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1} = (\mathbf{BKS} \mathbf{Diff} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{W} \mathbf{Diff} - \mathbf{E})$$

Bei Multiplikation von rechts mit  $\mathbf{W}^{-1}$  erhalten wir:

$$\Delta\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{BKS} \mathbf{Diff} - \mathbf{E}$$

Bei Multiplikation von links mit  $\mathbf{W}^{-1}$  erhalten wir:

$$\mathbf{W}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{W} = \mathbf{W} \mathbf{Diff} - \mathbf{E}$$

Eine Umformung der Darstellung von  $\mathbf{Diff}$  in einen sechsdimensionalen Beschreibungsvektor  $(d_x, d_y, d_z, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$  ist immer möglich. Dies erlaubt folgenden Ansatz in multiplikativer Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{Diff} &= \mathbf{Translation}(d_x, d_y, d_z) \cdot \mathbf{R}(a_{\rho_1}, \rho_1) \cdot \mathbf{R}(a_{\rho_2}, \rho_2) \cdot \mathbf{R}(a_{\rho_3}, \rho_3) = \\ &= \{(\mathbf{Translation}(d_x, d_y, d_z) - \mathbf{E}) + \mathbf{E}\} \cdot \{(\mathbf{R}(a_{\rho_1}, \rho_1) - \mathbf{E}) + \mathbf{E}\} \cdot \{(\mathbf{R}(a_{\rho_2}, \rho_2) - \mathbf{E}) + \mathbf{E}\} \cdot \\ &\quad \cdot \{(\mathbf{R}(a_{\rho_3}, \rho_3) - \mathbf{E}) + \mathbf{E}\} = \\ &= \{\mathbf{dT} + \mathbf{E}\} \cdot \{\Delta_{\rho_1} + \mathbf{E}\} \cdot \{\Delta_{\rho_2} + \mathbf{E}\} \cdot \{\Delta_{\rho_3} + \mathbf{E}\} = \\ &= \{\mathbf{dT} + \mathbf{E}\} \cdot \{\Delta_{\rho_1} \cdot \Delta_{\rho_2} \cdot \Delta_{\rho_3} + \Delta_{\rho_1} \cdot \Delta_{\rho_2} + \Delta_{\rho_1} \cdot \Delta_{\rho_3} + \Delta_{\rho_2} \cdot \Delta_{\rho_3} + \Delta_{\rho_1} + \Delta_{\rho_2} + \Delta_{\rho_3} + \mathbf{E}\} \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\mathbf{dT}$  bzw.  $\Delta_{\rho}$  je nach gewählter Darstellungsform homogene 4×4-Matrizen oder duale 3×3-Matrizen oder duale Quaternionen.

Bei Verwendung homogener 4×4-Matrizen gilt:  $\mathbf{dT} \cdot \Delta_{\rho_i} = \mathbf{0}$

Daraus folgt

$$\mathbf{Diff} = \Delta_{\rho_1} \cdot \Delta_{\rho_2} \cdot \Delta_{\rho_3} + \Delta_{\rho_1} \cdot \Delta_{\rho_2} + \Delta_{\rho_1} \cdot \Delta_{\rho_3} + \Delta_{\rho_2} \cdot \Delta_{\rho_3} + \Delta_{\rho_1} + \Delta_{\rho_2} + \Delta_{\rho_3} + \mathbf{E} + \mathbf{dT}$$

Handelt es sich bei  $\mathbf{Diff}$  - und damit auch bei  $(d_x, d_y, d_z, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$  - um eine sehr kleine Transformation, dann kann in Analogie zur Abschätzung der Roboterfunktion  $F$  mit  $\sin(\rho_i) \approx \rho_i$ ,  $\cos(\rho_i) \approx 1$  und  $\rho_j \dots \rho_k \approx 0$  die Näherungsgleichung

$$\mathbf{Diff} \approx \mathbf{D}_{\rho_1} + \mathbf{D}_{\rho_2} + \mathbf{D}_{\rho_3} + \mathbf{dT} + \mathbf{E}$$

aufgestellt werden. Durch Einsetzen dieser Näherungsgleichung in  $\Delta\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1}$  bzw.  $\mathbf{W}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{W}$  wird  $\mathbf{E}$  eliminiert und der verbleibende Term  $\mathbf{D}_{\rho_1} + \mathbf{D}_{\rho_2} + \mathbf{D}_{\rho_3} + \mathbf{dT}$  besitzt die gleiche Struktur wie  $\mathbf{K}$ .

Deutlich soll noch einmal hervorgehoben werden, daß der Rückgriff auf den sechsdimensionalen Beschreibungsvektor  $(d_x, d_y, d_z, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$  nur zum Beweis der Strukturgleichheit benötigt wurde und bei der Durchführung der Rückwärtsrechnung nicht verwendet werden muß; hier genügen die Werte von  $\Delta\mathbf{W}$  und  $\mathbf{W}^{-1}$ .

**Vergleich der Varianten I und II:**

a) bei homogenen 4×4-Matrizen:

Hier muß jeweils die dritte Spalte der  $\mathbf{U}_i$  und die dritte Zeile der  $\mathbf{Q}_i$  berechnet werden. Günstig erweist sich bei der Verwendung der dritten Zeile, daß die Variable des ersten Faktors  $\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$  in  $\mathbf{Q}_i$  nicht auftritt; dieser Vorteil wird allerdings durch die zusätzliche Multiplikation mit  $\mathbf{Z}_n$ , die bei der Berechnung der  $\mathbf{U}_i$  nicht anfällt, wieder ausgeglichen. Eine Betrachtung der Formeln für X, Y und Z zeigt, daß bis auf das Element  ${}^i q_{34}$  alle aktuellen Werte der  $\mathbf{Q}_i$  berechnet werden müssen, während im anderen Fall die Auswertung der Elemente  ${}^i u_{13}$ ,  ${}^i u_{23}$ ,  ${}^i u_{33}$ ,  ${}^i u_{14}$ ,  ${}^i u_{24}$  und  ${}^i u_{34}$  genügt. Da aber zur Bestimmung von  $\mathbf{U}_i$  die volle Matrix  $\mathbf{U}_{i-1}$  bekannt sein muß, tritt dieser Vorteil erst bei der Berechnung von  $\mathbf{U}_n$  auf. Insofern ist der Berechnungsaufwand für die Variante I, d.h. bei Multiplikation mit  $\mathbf{W}^{-1}$  von rechts, geringfügig niedriger als bei der Variante II.

b) bei dualen 3×3-Matrizen:

Da bei dualen 3×3-Matrizen die Positionsangaben und Rotationsangaben zusammengefaßt sind, gilt nach dem in a) Gesagten, daß der Berechnungsaufwand für beide Varianten in etwa gleich ist.

c) bei dualen Quaternionen:

Bei Verwendung dualer Quaternionen sind die Formeln, die die Elemente der Matrix  $\mathbf{K}$  definieren, für U und Q identisch; weil jedoch bei der Berechnung der  ${}^i q_j$  die zusätzliche Multiplikation mit  $\mathbf{Z}_n$  anfällt, erweist sich die Variante I als berechnungstechnisch günstiger.

Dem Vorteil der geringfügig effizienteren Berechenbarkeit der Variante I steht bei der Verwendung homogener 4×4-Matrizen eine Anfälligkeit hinsichtlich der numerischen Genauigkeit gegenüber. Der in Abschnitt 2.6.1 dargestellte Summenterm S für die exakte Beschreibung der inkrementellen Stellungsänderung  $\mathbf{Z-A}$  erhält durch die Multiplikation mit mindestens einer Matrix  $\Delta_i$  folgende Form:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wird dieser Term von links mit der invertierten aktuellen Stellung  $\mathbf{W}^{-1}$  multipliziert (Variante II), so erlangen die Positionselemente in  $\mathbf{W}^{-1}$  wegen der Nullen in der 4. Zeile keine Bedeutung. Das aus der Jacobi-Matrix resultierende lineare Gleichungssystem wird also nur durch eine *orthonormale* Transformation verändert; Zeilen- und Spaltennormen im Gleichungssystem bleiben konstant und es tritt daher keine Verschlechterung der Kondition ein [Deuter 88]. Im Gegensatz dazu sind bei einer Multiplikation des  $\mathbf{W}^{-1}$  von rechts (Variante I) die Positionselemente von  $\mathbf{W}$  sehr wohl in dem neu entstandenen Matrixprodukt vorhanden. Im Zuge der Linearisierung werden einige der Summanden aus S als vernachlässigbar klein eingestuft und deshalb gestrichen. Da aber für  $a \rightarrow 0$  und  $b \rightarrow \infty$

das Produkt  $a \cdot b$  nicht mehr zwangsläufig gegen Null geht, führt diese Tatsache in der Variante I bei einer sehr weit vom Ursprung entfernten aktuellen Stellung  $\mathbf{W}$  zu einer Vergrößerung der Linearisierungsfehler und zusätzlich zu einer starken Veränderung der Zeilen- und Spaltennormen des linearen Gleichungssystems, sodaß eine Konditionsverschlechterung nicht ausgeschlossen werden kann. Die Orientierungswerte in  $\mathbf{W}^{-1}$  sind dagegen aufgrund der Normiertheitsbedingung ungefährlich.

In der Darstellung mit dualen  $3 \times 3$ -Matrizen und dualen Quaternionen erhalten große Positionswerte der aktuellen Stellung  $\mathbf{W}$  sowohl bei Rechts- wie auch bei Linksmultiplikation Einfluß auf die entstehenden Summanden; die beiden Varianten I und II sind unter diesem Aspekt gleichwertig.

Abgesehen von der Varianten II mit homogenen  $4 \times 4$ -Matrizen muß der Einfluß der aktuellen Position des Roboters auf die Größe der Linearisierungsfehler als Preis für die Überwindung der Überbestimmtheit des linearen Gleichungssystems akzeptiert werden.

### 2.6.3 Vergleichende Bewertung der expliziten und der inkrementellen Rückwärtsrechnung

Der Vorteil der inkrementellen liegt in ihrer Anwendbarkeit auf alle Roboterkonstruktionen. Dem stehen jedoch im Vergleich zu geschlossenen Lösungen einige erhebliche Nachteile gegenüber:

1. Für die inkrementelle Rückwärtsrechnung sind nur kleine Distanzen zwischen Ziel und aktueller Stellung zulässig. Diese Forderung ist bei Bahnsteuerungen durch dichte Punktvorgabe oder bei sensorgeführten Effektorbewegungen erfüllt. Das eigentliche Problem liegt jedoch darin, daß keine Aussage darüber getroffen werden kann, wie klein  $\Delta \mathbf{W}$  in der jeweiligen Situation sein muß, um ein Übersteigen der maximal zulässigen Grenze der Bahnabweichung sicher zu verhindern.
2. Da auch beim inkrementellen Verfahren Sinus- und Cosinusausdrücke ausgewertet werden müssen und in jedem Zyklus zur Vermeidung der Fehleraddition eine Vorwärtsrechnung nötig ist, erweist sich bei Roboterklassen, die zu sukzessive quadratisch geschlossenen Lösungsformeln führen, die explizite Berechnung als effizienter.
3. Durch die explizite Lösung ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Gelenkvariablen und der Effektorstellung gegeben. Durch Differentiation nach der Zeit lassen sich daraus auch exakte Gleichungen für die Gelenkgeschwindigkeit und -beschleunigung gewinnen.
4. Die inkrementelle Rückwärtsrechnung erlaubt keinen Überblick über die Gesamtheit der zur Erreichung einer Zielvorgabe geeigneten Gelenkstellungen. Im Zuge einer vorausschauenden Bahnplanung und Kollisionsvermeidung ist dies jedoch sehr hilfreich. In diesem Zusammenhang erweist sich auch der Zwang zu kleinen Inkrementen als ausgesprochen hinderlich, zumindest aber als zeitraubend.

5. Eine a-priori-Behandlung von lokalen Degenerationsstellungen und Reduktionsstellungen ist nur durch eine Determinantenberechnung der quadratischen Matrix  $\mathbf{K}'$  möglich. Ist der Wert der Determinante gleich Null, so muß diese Stellung einer bestimmten Gelenkvariablenkonfiguration zugeordnet werden. Hierzu muß die Determinante durch Intuition geeignet faktorisiert werden. Eine Unterscheidung von lokaler Degenerationsstellung und Reduktionsstellung ist anhand der Determinantenanalyse nicht möglich. Ebenso sind unerreichbare Stellungen nicht formelmäßig beschreibbar, sondern fallen höchstens durch eine ungewöhnlich hohe Bahnabweichung auf. Auch das Arbeiten im Grenzbereich des zulässigen Arbeitsraumes erweist sich als problematisch, weil bei unzulässigen Gelenklösungen nicht klar ist, ob die Zielstellung tatsächlich unzulässig ist oder nur Näherungsfehler vorliegen.

# Index

Abstandsbetrachtung .....	68
Abstandsgleichung .....	68
Addition	
zweier dualer $3 \times 3$ -Matrizen .....	7
zweier dualer Zahlen .....	5
Akkumulation von Linearisierungsfehlern .....	96
Ansatz .....	48
ASEA-IR B6 .....	42; 71
ATAN2 .....	13; 15
Auflösungsformeln .....	55
Bahnfunktion .....	93
Bahnsteuerung .....	92
Berechnung	
der Effektorstellung .....	39; 40; 42; 45
der Gelenkgeschwindigkeit .....	92
von Punktkoordinaten .....	16
Beschreibungsvektor	
sechsdimensionaler .....	2
Bewegungsachsen .....	2
Bezugssystem .....	18; 48
BKS .....	18
Chasles-Theorem .....	8
D-H-Parameter .....	38
D-H-Regeln .....	34
D-H-Verfahren .....	34
Degeneration .....	64; 65; 67; 68; 89
-sstellungen .....	49
globale .....	65; 66; 72
lokale .....	49; 66; 90
Denavit-Hartenberg-Regeln .....	34
Differentiation	
explizite .....	94
implizite .....	94
$D_{i,i+1}$ .....	36; 38
Distanzbetrachtung .....	70

Distanzgleichung .....	70
Drehgelenk .....	38; 47
Dreifach-Schnittpunkt .....	49; 82; 84
Duale	
- 3×3-Matrix .....	7
- Gerade .....	27
- Quaternion .....	8
- Zahl .....	5; 28; 37
-r Vektor .....	6; 28
Effektorstellung	
mehrdeutig .....	54
unerreichbar .....	54; 63; 64
unzulässig .....	54
Epsilon-Konjugation .....	29
Erreichbarkeit aller Orientierungen .....	90
Eulerwinkel .....	3
explizit quadratische Lösungsansätze .....	55
Frame .....	5
Freiheitsgrad .....	2
Gangsystem .....	1; 92
GdA06 .....	75; 95
Gelenkkoordinaten .....	41
Gelenkvariable .....	38
allgemeine .....	38
Getriebefreiheitsgrad .....	2
homogene	
- 4×4-Matrix .....	4
- Koordinaten .....	3
- Transformationsmatrix .....	5
vollständige Bestimmtheit einer -n 4×4-Matrix .....	58
Interpolationstakt .....	93
Inverse	
einer dualen 3×3-Matrix .....	25
einer homogenen 4×4-Matrix .....	19
einer Quaternion .....	28
einer Rotationsmatrix .....	13
Jacobi-Matrix .....	99
kinematische	
Gleichung .....	33; 47; 57; 58
Grundgleichung .....	47
Kette .....	33
Koordinatensystem	
Bezugs- .....	1
objektspezifisches - .....	1
Welt- .....	1

Kreuzproduktmatrix .....	25
Liniengeometrie .....	7
Matrix .....	2
Moment .....	6
Multiplikation	
zweier dualer $3 \times 3$ -Matrizen .....	7
zweier dualer Zahlen .....	5
Norm	
für duale Quaternionen .....	27
Null-Lagen	
der Robotergelenke .....	41
optimale .....	41
Objektdefinition	
mehrstufige .....	18
relative .....	18
Objektstellung	
Beschreibung von -en .....	3
Orientierung	
einer Geraden .....	6
eines Objekts .....	1
Orientierungsbetrachtung .....	61
Orthonormalbedingung .....	57
parallele Rotationsachsen .....	40; 41; 47
Plückerkoordinaten	
einer Geraden .....	6
Position	
einer Geraden .....	6
eines Objekts .....	1
Positionswertbetrachtung .....	67
Primärteil	
einer dualen $3 \times 3$ -Matrix .....	24
einer dualen Zahl .....	5
Quaternion .....	2
duale .....	8; 38
Einheits- .....	27; 38
konjugierte .....	28
reelle .....	8
Rastsystem .....	1
Raumgeraden .....	7
Raumpunkt .....	4
Raumpunktgeometrie .....	7
Reduktion .....	64; 65; 67; 71; 72; 76; 77; 89
Reduktionsstellung .....	54; 63
erreichbare .....	69
unerreichbare .....	65

Redundanz	
der kinematischen Gleichung .....	57
reelle Zahl .....	2
Roboter .....	48
global degeneriert .....	49
Roboterfunktion $F(v_1, \dots, v_n)$ .....	47
Robotergelenk	
orientierungsändernd .....	60
positionsändernd .....	60
Roboterklasse .....	48
Roboterprogrammierung	
explizite .....	18
Teach-In .....	18
Rotationsanteil .....	20
Rotationsgelenk .....	60; 61
orthogonale -e .....	63
Rotationsmatrix .....	11
Multiplikationsreihenfolge .....	11
Rückwärtsrechnung .....	33; 47
explizite .....	33; 109
inkrementelle .....	33; 96; 109
Standardform .....	47
Schleppfehler .....	93
Schubgelenk .....	38; 47
Sekundärteil	
einer dualen $3 \times 3$ -Matrix .....	21
einer dualen Zahl .....	5
Standardform	
der Roboterkenndaten .....	42
statisches Gelenk .....	40
Stellung .....	2
eines Objekts .....	1; 4
räumliche .....	1
unerreichbare .....	72; 73; 76
Stellungsangabe	
absolute .....	10
relative .....	10
Stellungsbeschreibung .....	3
Verkettung von -en .....	18
Steuerungen von Robotern .....	92
Tangenssubstitution .....	55
Transformation	
einer Dualquaternion in eine duale $3 \times 3$ -Matrix .....	31
einer Dualquaternion in eine homogene $4 \times 4$ -Matrix .....	30
einer homogenen $4 \times 4$ -Matrix in eine Dualquaternion .....	29

einer Raumgeraden .....	23; 28
eines Vektors .....	17; 23; 28
von Punktkoordinaten .....	16; 23; 29
Transformationsmatrix	
Aufspaltung in Rotation und Translation .....	20
homogene .....	5
konstante - <b>TR</b> .....	39
Translationsgelenk .....	60
Unerreichbarkeit .....	64
Unerreichbarkeitskriterium .....	56; 65
Ursprungsgeraden .....	7
Vektor .....	2; 4
freier .....	17
homogener .....	17
Verknüpfungsregel	
für relative Stellungsangaben .....	18
Verknüpfungsvorschrift	
für Quaternionen.....	27
Vorwärtsrechnung .....	33
Weltkoordinatensystem 1	
$\mathbf{X}_{i+1}$ .....	36; 37; 38
Yaw–Pitch–Roll .....	3
$\mathbf{Z}_i$ .....	36; 37; 38
Zielsystem .....	48
Zylindergelenk .....	86
Überschwingen .....	93
Übertragungsprinzip .....	7

# Literaturverzeichnis

- [Ball 1876] R. S. Ball, "Theory of Screws: A Study in the Dynamics of a Rigid Body", University Press, Hodges, Forster & Co., Dublin, 1876.
- [Baumeister 86] M. Baumeister, "Ermittlung von Roboterklassen mit Lösungspolynomen vom Grad 4", Institut für Informatik der TU München, Diplomarbeit, November 1986.
- [Brand 57] L. Brand, "Vector Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1957.
- [Blaschke 60] W. Blaschke, "Kinematik und Quaternionen", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [Bronstein 74] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Zürich, Frankfurt/Main, 1974.
- [Cevik 87] M.K. Cevik, "Ein Beitrag zur vollständigen digitalen Lageregelung von Servoantrieben ohne Tachogenerator am Beispiel eines Industrieroboters mit verteilter Intelligenz", Fachbereich Elektrotechnik der TU Berlin, Dissertation, 1987.
- [Denavit 55] J. Denavit and R.S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", ASME J. Appl. Mech. 22, 1955, 215-221.
- [Deuter 88] M. Deuter und M. Hornung, "Vergleich zweier Varianten zur inkrementellen Rückwärtslösung am Beispiel des PUMA560", Institut für Informatik der TU München, Fortgeschrittenenpraktikum, 1988.
- [Giloi 78] W.K. Giloi, "Interactive computer graphics", Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1978.
- [Glavina 85] B. Glavina, "Mathematische Darstellungen von räumlichen Bewegungen und ihre Einsatzmöglichkeiten in der Roboterkinematik", Institut für Informatik der TU München, Diplomarbeit, November 1985.
- [Heindl 83] J. Heindl, "Einführung in Kinematik und Programmierverfahren von Industrierobotern", Unterlagen zum Lehrgang R2.02 "Roboter mit Tastsinn" der CCG, Oberpfaffenhofen, 4.7. - 8.7.1983, Kapitel 0.

- [Heiß 85] H. Heiß, "Die explizite Lösung der kinematischen Gleichung für eine Klasse von Industrierobotern", Fachbereich Informatik der TU Berlin, Dissertation, April 1985.
- [Hiller 86] M. Hiller und C. Woernle, "Ein systematisches Verfahren zur numerischen Behandlung der Rückwärtstransformation bei Industrierobotern", in VDI-Berichte 598, "Steuerung und Regelung von Robotern", VDI-Verlag, Düsseldorf, 1986, 147-161.
- [Lara-Feria 86] A. Lara-Feria and J. Verdaguer-Codina, "Quaternions applied to direct and inverse robot kinematics problem", in P. Kopacek, I. Troch and K. Desoyer (eds.), "Int. Symp. of Theory of Robots (Preprints)", IFAC, Vienna, 1986, 7-11.
- [Lee 82] C.S.G. Lee, "Robot arm kinematics, dynamics, and control", IEEE Computer, December 1982, 62-79.
- [Meyberg 75] K. Meyberg, "Algebra, Teil 1", Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1975.
- [Meyberg 76] K. Meyberg, "Algebra, Teil 2", Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1976.
- [Newman 79] W.M. Newman, R.F. Sproull, "Principles of Interactive Computer Graphics", McGraw-Hill, Japan, 1979.
- [Paul 81a] R.P. Paul, "Robot manipulators: mathematics, programming, and control", MIT Press, Cambridge (Mass.), London, 1981.
- [Paul 81b] R.P. Paul, B. Shimano and G.E. Mayer, "Kinematic control equations for simple manipulators", IEEE Systems, Man and Cybernetics 6, June 1981, 449-455.
- [Paul 81c] R.P. Paul, B. Shimano and G.E. Mayer, "Differential kinematic control equations for simple manipulators", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics 6, June 1981, 456-460.
- [Penna 86] M.A. Penna and R.R. Patterson, "Projective geometry and its application to computer graphics", Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1986.
- [Pfeiffer 87] F. Pfeiffer und E. Reithmeier, "Roboterdynamik", Unterlagen zum Lehrgang R2.03 "Roboterdynamik" der CCG, Oberpfaffenhofen, 24.3. - 26.3.1987.
- [Pieper 69] D.L. Pieper, "The kinematics of manipulators under computer control", Stanford University, Ph.D. Thesis, 1969.
- [Reinsch 74] C. Reinsch, "Einführung in die numerische Mathematik", Institut für Mathematik der TU München, Vorlesungsskriptum, 1974.
- [Rooney 75] J. Rooney, "On the principle of transference", in "Proc. of the 4th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms", I. Mech. E., Newcastle upon Tyne, 1975, 1088-1092.

- [Rooney 77] J. Rooney, "A survey of representations of spatial rotation about a fixed point", *Environment and Planning B*, 1977, 185-210.
- [Rooney 78] J. Rooney, "A comparison of representations of general spatial screw displacement", *Environment and Planning B*, 1978, 45-88.
- [Roth 76] B. Roth, "Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint", *National Bureau of Standards, Special Publications 459*, 1976, 39-61.
- [Waldhauser 87] F. Waldhauser, "Vergleich der Rückwärtsrechnung mittels kinematischer Gleichung bzw. charakteristischem Gelenkpaar", *Institut für Informatik der TU München, Diplomarbeit*, Mai 1987.
- [Yang 69] A.T. Yang, "Displacement analysis of spatial five-link mechanisms using (3×3) matrices with dual-number elements", *ASME Journal of Engineering for Industry*, Feb. 1969, 152-157.
- [Yang 74] A.T. Yang, "Calculus of screws", in W.R. Spillers (ed), "Basic questions of design theory", *North Holland Publishing Company, Amsterdam*, 1974.