

2.3 Ein Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung zweiten Grades

Wir haben bereits in Abschnitt 2.2.3 erläutert, warum die kinematische Gleichung zweiten Grades eine besonders wichtige Bedeutung für die Rückwärtsrechnung hat. Das hier angegebene Verfahren [Heiß 85] erlaubt für eine große Zahl von Roboterklassen Aussagen, mit welchen Ansätzen die kinematische Gleichung systematisch gelöst werden kann. Diese Ansätze beruhen auf geometrischen Überlegungen, die zu einer geeigneten Wahl der Bezug- und Zielsysteme in der kinematischen Gleichung und damit zu einfachen Bestimmungsgleichungen für die Gelenkvariablen führen. In diesem Verfahren werden zur Beschreibung der Gelenkstellungen homogene 4×4 -Matrizen verwendet.

2.3.1 Charakterisierung der Robotergelenke

Eine Grundvoraussetzung für die Entwicklung des folgenden expliziten Lösungsverfahrens ist die Zuordnung kinematischer Eigenschaften zu den jeweiligen Gelenktypen. Ein heißt *positionsändernd*, wenn das Zielsystem des zugrundegelegten Ansatzes durch eine Gelenkbewegung in seiner Position, und Robotergelenk*orientierungsändernd*, wenn es in seiner Orientierung verändert wird. Insbesondere das Attribut *positionsändernd* ist bei Rotationsgelenken von der Wahl des Zielsystems abhängig.

Allgemeines Translationsgelenk

Da die Translationsvariable t_i nur auf der Position 3.4 in der zugehörigen Transformationsmatrix \mathbf{Z}_i erscheint, tritt sie auch nach beliebig vielen Matrixmultiplikationen mit anderen Transformationsmatrizen \mathbf{Z}_j und \mathbf{X}_j immer nur in der vierten Spalte der Ergebnismatrix und nie multiplikativ verknüpft mit einer anderen Translationsvariablen auf. Damit sind also Translationsgelenke immer *positionsändernd* und nie *orientierungsändernd*.

Parallele Rotationsgelenke

Wie in Abschnitt 2.1.4 schon erwähnt, können die p Variablen von p aufgrund der mechanischen Konstruktion parallelen Rotationsgelenken in der Matrix \mathbf{M} zu einer einzigen Variablen $d_p = d_1 \pm d_2 \pm \dots$ zusammengefaßt werden. Der Orientierungsteil weist nur noch die Variable d_p auf. Somit haben bis auf das letzte Rotationsgelenk alle $p-1$ Gelenke ihre orientierungsändernde Wirkung verloren.

Mit $l_i \neq 0$ besitzt aber jedes dieser p parallelen Rotationsgelenke noch einen *positionsändernden* Effekt; d.h.: die in der kinematischen Kette ersten $p-1$ parallelen Rotationsgelenke sind nur *positionsändernd* und das letzte Rotationsgelenk ist sowohl *positionsändernd* als auch *orientierungsändernd* (bezüglich der *positionsändernden* Eigenschaft ist auch der nächste Absatz zu beachten).

Rotationsgelenk mit Drehachse im Ursprung des Zielsystems

Dieses Rotationsgelenk besitzt zwar eine orientierungsändernde Wirkung auf das Zielsystem, jedoch keinen positionsändernden Effekt, da eine Drehung um diese Gelenkachse den Ursprung des Zielsystems nicht bewegt.

Allgemeines Rotationsgelenk

Ein allgemeines Rotationsgelenk, das nicht die Voraussetzungen der beiden vorigen Absätze erfüllt, ist sowohl positionsändernd als auch orientierungsändernd. Dies läßt sich leicht aus der Transformationsmatrix $\mathbf{D}_{i,i+1}$ erkennen, da die Gelenkvariable d_i sowohl im Orientierungs- als auch im Positionsteil der Matrix auftritt.

2.3.2 Orientierungsbetrachtung

Bei diesem Verfahren wird die Möglichkeit bei parallelen Rotationsgelenken ausgenutzt, die Gelenkvariablen zusammenzufassen, so daß nur das letzte Gelenk in der kinematischen Kette sowohl positions- als auch orientierungsändernd ist.

Für Roboterkonstruktionen mit drei orientierungsändernden Gelenken kann immer eine geschlossene Lösungsformel für diese drei Gelenkvariablen abgeleitet werden, indem ein Ansatz zugrundegelegt wird, bei dem die z-Achse des Bezugssystems und die z-Achse des Zielsystems mit jeweils einer Rotationsachse eines der drei orientierungsändernden Gelenken zusammenfallen. Die Variable des dritten orientierungsändernden Gelenks kann dann explizit berechnet werden. In Abhängigkeit von diesem Ergebnis lassen sich auch für die anderen zwei Variablen geschlossene Lösungen ermitteln.

Bezeichnen wir die Transformationsmatrizen der drei orientierungsändernden Gelenke mit $\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1}$, $\mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2}$ und $\mathbf{Z}_{R3} \cdot \mathbf{X}_{R3}$, ohne daß durch die Wahl der Indizes damit festgelegt sein soll, daß diese Gelenke in der kinematischen Kette unmittelbar aufeinander folgen. Bezeichnen wir weiterhin mit \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} Produkte der restlichen Transformationsmatrizen aus \mathbf{M} , die keine Orientierungsänderung bewirken. Dann können wir die kinematische Gleichung in folgender Form angeben:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} \cdot \mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{W}$$

Der Ansatz

$$\mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D})^{-1}$$

genügt dann beispielsweise den im vorigen Absatz gestellten Forderungen.

Dies erlaubt über die Einzelgleichung 3.3 die Bestimmung der Variablen d_{R1} , weil einerseits das Rotationsgelenk R2 aufgrund der Identität von Rotationsachse \mathbf{z}_{R2} und z-Achse des Bezugssystems die z-Werte des Zielsystems, d.h. die dritte Zeile der Matrixgleichung, nicht verändert. Andererseits verändert das Rotationsgelenk R3 aufgrund der Identität von

Rotationsachse \mathbf{z}_{R3} und z-Achse des Zielsystems den z-Vektor des Zielsystems, d.h. die dritte Spalte der Matrixgleichung, nicht. Damit tritt in der Gleichung 3.3 weder die Variable d_{R2} noch die Variable d_{R3} auf. Die Variable d_{R1} kann als einzige in 3.3 auftretende orientierungsändernde Variable berechnet werden.

Formen wir den obigen Ansatz noch etwas um

$$\mathbf{Z}_{R2} \cdot \mathbf{X}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}_{R3} = (\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D})^{-1}$$

und benutzen \mathbf{K} als Abkürzung für das Matrixprodukt $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_{R3} \cdot \mathbf{D})^{-1}$, dann hat die Gleichung 3.3 folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha_{R2}) \cdot C_{23} + \cos(\alpha_{R2}) \cdot C_{33} = \\ & = \cos(d_{R1}) \cdot \{B_{13} \cdot K_{13} + (B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})) \cdot K_{23}\} \\ & + \sin(d_{R1}) \cdot \{B_{13} \cdot K_{23} - (B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})) \cdot K_{13}\} \\ & + (B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})) \cdot K_{33} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Variablen d_{R1} aus 3.3 können sich folgende drei Fälle ergeben:

Fall 1: Die Variable d_{R1} verschwindet aus 3.3, falls gleichzeitig gilt:

1. $B_{13}=0$
2. $B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})=0$

In diesem Fall ist die Roboterkonstruktion global (orientierungs-)degeneriert, da die Rotationsachse \mathbf{z}_{R1} parallel zur Rotationsachse \mathbf{z}_{R2} ist und damit das Rotationsgelenk R1 keinen zusätzlichen Orientierungsfreiheitsgrad bringt (vgl. Abschnitt 2.3.1). Mit den zwei verbleibenden Orientierungsgelenken R2 und R3 läßt sich aber nicht der volle Orientierungsfreiheitsgrad drei erreichen.

Nachweis der Parallelität von \mathbf{z}_{R1} und \mathbf{z}_{R2} :

Die dritte Spalte des Matrizenprodukts $\mathbf{Z}_{R1} \cdot \mathbf{X}_{R1} \cdot \mathbf{B}$ beschreibt die Orientierung der Achse \mathbf{z}_{R2} , bezogen auf das System S_{R1} . Für ${}^{S_{R1}}\mathbf{z}_{R2}$ gilt:

$$\begin{aligned} {}^{S_{R1}}\mathbf{z}_{R2} &= \begin{bmatrix} \cos(d_{R1}) & -\sin(d_{R1}) & 0 & 0 \\ \sin(d_{R1}) & \cos(d_{R1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{R1} \\ 0 & \cos(\alpha_{R1}) & -\sin(\alpha_{R1}) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_{R1}) & \cos(\alpha_{R1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(d_{R1}) & -\sin(d_{R1}) & 0 & 0 \\ \sin(d_{R1}) & \cos(d_{R1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1}) \\ B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Voraussetzungen von Fall 1 und unter Rückgriff auf die Normiertheit der dritten Spalte von \mathbf{B} läßt sich die Spaltenbeschreibung von \mathbf{z}_{R2} weiter vereinfachen zu

$${}_{S_{R1}}\mathbf{z}_{R2} = \begin{bmatrix} \cos(d_{R1}) & -\sin(d_{R1}) & 0 & 0 \\ \sin(d_{R1}) & \cos(d_{R1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dies zeigt, daß \mathbf{z}_{R2} parallel zur Achse \mathbf{z}_{R1} ist.

Fall 2: Sei $a = B_{23} \cdot \cos(\alpha_{R1}) - B_{33} \cdot \sin(\alpha_{R1})$, dann verschwindet die Variable d_{R1} aus 3.3, falls gleichzeitig gilt:

1. $B_{13} \cdot K_{13} + a \cdot K_{23} = 0$
2. $B_{13} \cdot K_{23} - a \cdot K_{13} = 0$
3. die Bedingungen von Fall 1 sind nicht erfüllt, d.h. $a \neq 0$ oder $B_{13} \neq 0$.

Geometrische Interpretation der Bedingungen:

Aus den obigen Bedingungen folgt $K_{13} = 0$ und $K_{23} = 0$ und damit $K_{33} = \pm 1$.

Die dritte Spalte von $\mathbf{z}_{R1} \cdot \mathbf{x}_{R1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}_{R2} \cdot \mathbf{x}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}_{R3}$ beschreibt die Achse \mathbf{z}_{R3} in Bezug zum System S_{R1} und aus dem Ansatz $\mathbf{z}_{R1} \cdot \mathbf{x}_{R1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}_{R2} \cdot \mathbf{x}_{R2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}_{R3} = \mathbf{K}$ ist mit $K_{13} = 0$, $K_{23} = 0$ und $K_{33} = \pm 1$ ersichtlich, daß die Achse \mathbf{z}_{R3} parallel zur Achse \mathbf{z}_{R1} ist.

Da wegen der Parallelität der Rotationsachsen \mathbf{z}_{R1} und \mathbf{z}_{R3} eine Reduktionsstellung vorliegt, ist die Variable d_{R1} beliebig wählbar, sofern der verbleibende Teil der Einzelgleichung 3.3

$$\sin(\alpha_{R2}) \cdot C_{23} + \cos(\alpha_{R2}) \cdot C_{33} = \pm (B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})) \quad (\text{jetzt ohne Variablen!})$$

für den vorgegebenen Zielwert \mathbf{W} korrekt erfüllt ist (Beweis siehe [Heiß 85]); andernfalls ist die gewünschte Orientierung nicht einstellbar, d.h. die Zielstellung \mathbf{W} ist Effektorstellungunerreichbar.

Es läßt sich zeigen [Heiß 85], daß bei Robotern, die drei aufgrund der mechanischen Konstruktion Rotationsgelenke besitzen (\mathbf{z}_{R1} senkrecht zu \mathbf{z}_{R2} , \mathbf{z}_{R2} senkrecht zu \mathbf{z}_{R3}), die Gleichung 3.3 immer korrekt erfüllt ist. Damit kann jede gewünschte Orientierung des Effektors erreicht werden, wobei natürlich unzulässige Stellungen ausgenommen sind.

Der Fall 2 unterscheidet sich mechanisch gesehen von Fall 1 dadurch, daß nichtbenachbarte Orientierungsgelenke zueinander parallel sind im Gegensatz zu den benachbarten Orientierungsgelenken R1 und R2 in Fall 1.

Fall 3: In 3.3 ist entweder der Faktor von $\cos(d_{R1})$ oder der Faktor von $\sin(d_{R1})$ ungleich Null. In diesem Fall erhalten wir zwei Lösungen für d_{R1} entsprechend der in Abschnitt

2.2.3 angegebenen Formeln. Ein negativer Radikand bei der Berechnung von d_{R1} zeigt, daß die in der Zielstellung \mathbf{W} angegebene Orientierung für die vorliegende Roboterkonstruktion Effektorstellungunerreichbar ist. Analog zu Fall 2 wird durch orthogonale Orientierungsgelenke die Erreichbarkeit aller möglichen Orientierungen garantiert.

Berechnung der Variablen d_{R2} und d_{R3}

Mit vorgegebenem d_{R1} -Wert können aus den beiden Gleichungen 1.3 und 2.3 folgende Bestimmungsgleichungen für d_{R2} ermittelt werden:

$$\sin(d_{R2}) = a \quad \cos(d_{R2}) = b$$

Damit erhalten wir eine Lösung für d_{R2} :

$$d_{R2} = \text{ATAN2}(a,b)$$

Die Situation, daß sämtliche d_{R2} -Terme aus den Gleichungen 1.3 und 2.3 verschwinden, kann nur bei Parallelität der Achsen \mathbf{z}_{R2} und \mathbf{z}_{R3} auftreten. Dies entspricht einer globalen (Orientierungs-) Degeneration.

Ebenso erhalten wir aus den Gleichungen 3.1 und 3.2 folgende Bestimmungsgleichungen für d_{R3} :

$$\sin(d_{R3}) = c \quad \cos(d_{R3}) = d$$

Damit ergibt sich als Lösung für d_{R3} :

$$d_{R3} = \text{ATAN2}(c,d)$$

Anmerkung zur Korrektheit der Lösung für d_{R2} und d_{R3}

Ist die Gleichung 3.3 korrekt erfüllt, dann sind die aus 1.3 und 2.3 bzw. 3.1 und 3.2 berechneten Lösung für d_{R2} bzw. d_{R3} ebenfalls korrekt (vgl. [Heiß 85]). Es genügt also bei der Bestimmung der Orientierungsvariablen die Analyse der ersten aus 3.3 zu ermittelnden Variablen d_{R1} , um Aussagen über Degeneration, Reduktion oder Unerreichbarkeit treffen zu können.

Abschließend muß noch gezeigt werden, daß mit den ermittelten Lösungen für die Orientierungsvariablen d_{R1} , d_{R2} und d_{R3} alle 9 Orientierungsgleichungen des zugrundeliegenden Ansatzes erfüllt sind. Dieser Nachweis wird unter Rückgriff auf den Satz über die vollständige Bestimmtheit einer homogenen 4×4 -Matrix erbracht:

Die Gleichungen 1.3, 2.3, 3.3, 3.1 und 3.2 sind für alle nichtdegenerierten Roboter und alle erreichbaren Zielstellungen \mathbf{W} korrekt erfüllt, da aus diesen Gleichungen die Variablen d_{R1} , d_{R2} und d_{R3} berechnet wurden. Um den Satz anwenden und damit die korrekte Erfüllung aller 9 Orientierungsgleichungen nachweisen zu können, muß lediglich noch gezeigt werden, daß $|3.3\text{links}| \neq 1$ bzw. $|3.3\text{rechts}| \neq 1$ gilt.

Die Widerspruchsannahme $|3.3_{\text{links}}|=|3.3_{\text{rechts}}|=1$ entspricht einer globalen, da in diesem Fall \mathbf{z}_{R2} parallel zu \mathbf{z}_{R3} ist. Damit sind alle neun Orientierungsgleichungen mit d_{R1} , d_{R2} und d_{R3} korrekt erfüllt.

Berechnung der restlichen Variablen

Die Berechnung der restlichen Variablen erfolgt mit Hilfe der in den beiden folgenden Abschnitten beschriebenen Verfahren. Hierbei werden die übriggebliebenen Einzelgleichungen 1.4, 2.4 und 3.4 benutzt, was einer Betrachtung der Positionsspalte entspricht.

Bemerkung zur Degeneration und Reduktion:

Während eine Degeneration gewisse Stellungen im Arbeitsraum von der Erreichbarkeit durch den Roboter ausschließt, ist dies bei Reduktionsstellungen keineswegs der Fall. Da unterschiedliche Konsequenzen aus dem Vorliegen einer (auch lokalen) Degeneration und dem Auftreten einer Reduktionsstellung gezogen werden müssen, kommt der Unterscheidung zwischen Degeneration und Reduktion eine erhebliche Bedeutung zu. Deshalb werden im folgenden ihre Erscheinungsformen zusammengestellt und am Beispiel der Orientierungsbetrachtung erläutert.

Die allgemeine Form einer Bestimmungsgleichung lautet $a \cdot \sin(d) - b \cdot \cos(d) = c$ für eine Rotationsvariable d (im Beispiel: d_{R1}) und $a \cdot t^2 + b \cdot t = c$ für eine Translationsvariable t . Gilt nun in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Zielstellung – genauer gesagt abhängig von einer Teilmenge M_1 der numerischen Werte W_{ij} der Zielstellung bzw. der schon berechneten Gelenkvariablen v_k –

$$a(w_1, \dots, w_m) = 0 \text{ und } b(w_1, \dots, w_m) = 0, \quad w_l \in M_1 = \{\dots, W_{ij}, \dots, v_k, \dots\}, \quad 1 \leq l \leq m$$

dann verschwindet die zu berechnende Gelenkvariable v aus der Bestimmungsgleichung. Folgende Fälle müssen hierbei unterschieden werden:

1. Reduktionsstellung:

c ist konstant oder nur von $w_c \in M$, M Teilmenge von M_1 , abhängig und es gilt: $c(\dots, w_c, \dots) = 0$.

Damit ist diese Bestimmungsgleichung auch beim Verschwinden der Variablen v korrekt erfüllt; verschwindet wegen $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ die Variable v nicht, dann existiert eine Lösung für die Gelenkvariable v , die sicherstellt, daß die Bestimmungsgleichung korrekt erfüllt ist.

2. Unerreichbare :

c ist konstant oder nur von $w_c \in M$, M Teilmenge von M_1 , abhängig und es gilt: $c(\dots, w_c, \dots) \neq 0$.

Damit ist die Bestimmungsgleichung für die durch $w_l \in M_1$ definierte Reduktionsstellung nicht korrekt erfüllt (Unerreichbarkeitskriterium).

Eine unerreichbare Reduktionsstellung liegt auch dann vor, wenn c neben $w_c \in M$ noch von weiteren numerischen Werten $W_{mn} \notin M_1$ oder schon berechneten Gelenkvariablen $v_1 \notin M_1$ abhängt, aber *für alle möglichen* Werte von W_{mn} und v_1 gilt:

$$c(\dots, w_c, \dots, W_{mn}, \dots, v_1, \dots) \neq 0.$$

Bei der Berechnung der Variablen d_{R1} in der Orientierungsbetrachtung wurde Fall 2 als Reduktionsstellung bezeichnet. Mit den Bedingungen 1, 2 und 3 von Fall 2 läßt sich jedoch zeigen, daß $K_{13} = K_{23} = 0$ ist und damit wegen der Orthonormalität $K_{33} = \pm 1$ sein muß. Je nachdem, ob der konstante, verbleibende Teil

$$\sin(\alpha_{R2}) \cdot C_{23} + \cos(\alpha_{R2}) \cdot C_{33} \mp B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) \mp B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})$$

der Einzelgleichung 3.3 gleich Null oder ungleich Null ist, handelt es sich um eine erreichbare oder unerreichbare Reduktionsstellung.

3. Lokale :

$c(\dots, w_c, \dots, W_{mn}, \dots, v_1, \dots)$ hängt von weiteren numerischen Werten $W_{mn} \notin M_1$ oder Gelenkvariablen $v_1 \notin M_1$ ab und die Bestimmungsgleichung kann mit bestimmten Werten für W_{mn} bzw. v_1 korrekt und mit anderen Werten für W_{mn} bzw. v_1 nicht korrekt erfüllt werden (Unterschied zu 2.). Damit können aber bestimmte Stellungen vom Roboter erreicht werden, andere dagegen nicht, und das bedeutet Freiheitsgrad $f < 6$.

4. Globale :

In diesem Fall sind a und b unabhängig von W_{ij} und v_k konstant gleich Null. Der Faktor c muß dann entweder gleich Null sein (triviale Gleichung) oder aber c muß abhängig von numerischen Werten W_{ij} bzw. von schon berechneten Gelenkvariablen v_k zu Null gemacht werden können. Dies ist immer möglich, da für jeden Roboter zumindest eine Stellung existiert, für die die kinematische Grundgleichung korrekt erfüllt ist. Im zweiten Fall ist der Freiheitsgrad des Roboters $f < 6$.

Im Beispiel der Orientierungsbetrachtung ist Fall 1 als globale Degeneration ausgewiesen worden. a und b sind nach Bedingung 1 und 2 konstant Null und es muß nur noch gezeigt werden, daß c abhängig von verschiedenen Zielvorgaben Null und ungleich Null wird. Da K_{33} der einzige von der Zielstellung beeinflusste Term in c ist, darf der Faktor " $B_{23} \cdot \sin(\alpha_{R1}) + B_{33} \cdot \cos(\alpha_{R1})$ " nicht verschwinden. Anhand der Bedingungen 1 und 2 und der Orthonormiertheitsbedingung für B_{13} , B_{23} und B_{33} läßt sich dies zeigen.

An dieser Stelle wird deutlich, daß es für Orientierungsgelenke keine lokale, sondern nur eine globale Orientierungsdegeneration gibt. Daneben kann lediglich aufgrund der Parallelität zweier nicht benachbarter Orientierungsgelenke eine Reduktionsstellung auftreten.

2.3.3 Positionswertbetrachtung

Dieses Verfahren führt immer dann zu einer geschlossenen Lösungsformel für eine Gelenkvariable v_p , wenn bis auf ein Gelenk P alle anderen Robotergelenke durch ihre Bewegung das Zielsystem nur in einer *Ebene* verändern.

Da Rotationsachsen, die durch den Ursprung des Zielsystems laufen, nur die Orientierung, jedoch nicht die Position des Zielsystems verändern, kommt dem im Ansatz zugrundegelegten Zielsystem entscheidende Bedeutung zu. So kann z.B. bei drei sich schneidenden Rotationsgelenkachsen durch die Wahl dieses Schnittpunktes als Ursprung des Zielsystems der Einfluß dieser drei Gelenke – die durchaus den Effektor in seiner Position verändern dürfen – auf den Bewegungsraum des Zielsystems eliminiert werden.

Für nichtdegenerierte Roboter, d.h. für Roboter mit dem Freiheitsgrad $f=6$, kann die obige Bedingung, daß sich das Zielsystem nur in einer Ebene verändern darf, nur eingehalten werden, wenn vorher mit Hilfe der Orientierungsbetrachtung schon drei Rotationsvariablen bestimmt wurden bzw. wenn zwei oder drei sich schneidende Rotationsgelenkachsen existieren. Alle bezüglich des zugrundegelegten Zielsystems positionsändernden, noch nicht festgelegten Rotationsgelenke $\neq P$ müssen nämlich zueinander parallele Achsen besitzen und alle Translationsgelenke $\neq P$ müssen senkrecht zu diesen parallelen Rotationsgelenkachsen verlaufen; nur dann existiert solch eine geforderte Bewegungsebene. Da aber mehr als drei Gelenke, die sich in parallelen Ebenen bewegen, genauso zur Degeneration führen wie mehr als drei sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneidende Rotationsgelenke, dürfen mindestens zwei der sechs Robotergelenke keine positionsändernden Gelenke sein. Dies ist nur möglich, wenn sich zwei Rotationsachsen in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt muß als Ursprung des Zielsystems gewählt werden.

Wird nun das Bezugssystem so gewählt, daß eine seiner Achsen senkrecht zu dieser Bewegungsebene verläuft, so kann die Gelenkvariable v_p aus der Position bezüglich dieser Bezugssystemachse explizit berechnet werden. Als Sonderfälle müssen auch hier lokale Degeneration, Reduktion und unerreichbare Zielstellung untersucht werden.

1. Reduktionsstellung:

Eine Reduktionsstellung liegt genau dann vor, wenn der Ursprung des Zielsystems (bei voller dreidimensionaler Beweglichkeit) auf der Rotationsachse einer noch zu bestimmenden Rotationsvariablen liegt. In diesem Fall kann nämlich dieses Gelenk jede beliebige Stellung einnehmen, ohne dadurch eine Positionsänderung des Zielsystems zu verursachen.

2. Unerreichbare Stellungen:

Eine unerreichbare Zielstellung liegt beim Auftreten eines negativen Radikanden vor oder wenn die Bestimmungsgleichung für eine Reduktionsstellung nicht korrekt erfüllt ist.

3. Degeneration:

In allen anderen Fällen, in denen die Gelenkvariable v_p aus der betrachteten Positionsgleichung verschwindet, handelt es sich um eine Degeneration.

Gelingt es, mit Hilfe des Positionswertverfahrens eine Variable zu bestimmen, verringert sich die Komplexität der kinematischen Gleichung so erheblich, daß für sämtliche noch unbekannte Variablen mit einem der hier beschriebenen Ansätze geschlossene Lösungen gefunden werden können.

Auch Roboter mit einem Getriebefreiheitsgrad $F > 6$ können im Rahmen der Positionswertbetrachtung behandelt werden, wenn für alle möglichen Werte der vorher festgelegten $F-6$ Gelenkvariablen sichergestellt ist, daß das Zielsystem nur in einer Ebene verändert wird.

2.3.4 Abstandsbetrachtung

Dieses Verfahren basiert neben der Aussage aus Abschnitt 2.3.3 zur Positionsinvarianz von Rotationsgelenken auf der Erkenntnis, daß Rotationsgelenkachsen, die durch den Ursprung des Bezugssystems laufen, zwar die Position, nicht jedoch den Abstand des Ursprungs des Zielsystems vom Ursprung des Bezugssystems verändern. Insofern liefern (nichtdegenerierte) Roboterkonstruktionen mit sechs Gelenken, von denen sich zwei bzw. drei disjunkte Rotationsgelenkachsen aufgrund der mechanischen Konstruktion in den Punkten 2S bzw. 3S schneiden, eine Möglichkeit zur expliziten Bestimmung der sechsten nicht an den Schnittpunkten 2S und 3S beteiligten Gelenkvariablen. Dazu wird der Ursprung des Bezugssystems und des Zielsystems der kinematischen Gleichung in den Schnittpunkt 2S bzw. 3S gelegt. Aus diesem Ansatz der kinematischen Gleichung $M' = W'$ wird als Bestimmungsgleichung für die nicht an den Schnittpunkten beteiligte Gelenkvariable der Abstand zwischen Bezug- und Zielsystem berechnet:

$$\sqrt{M'_{14}{}^2 + M'_{24}{}^2 + M'_{34}{}^2} = \sqrt{W'_{14}{}^2 + W'_{24}{}^2 + W'_{34}{}^2} \quad \text{bzw. einfacher}$$

$$M'_{14}{}^2 + M'_{24}{}^2 + M'_{34}{}^2 = W'_{14}{}^2 + W'_{24}{}^2 + W'_{34}{}^2 \quad (\text{Abstandsgleichung})$$

In dieser Gleichung verschwinden alle Variablen der an den Schnittpunkten beteiligten fünf Gelenke und es kann eine Lösung für die gesuchte Gelenkvariable abgeleitet werden.

Für die restlichen fünf Variablen werden dann die Lösungen mit Hilfe der Positionswertbetrachtung und der Orientierungsbetrachtung ermittelt.

Die Beschränkung auf sechs Gelenke kann durch folgende Überlegung fallengelassen werden:

Besitzt ein Roboter $F > 6$ Gelenke, dann müssen $F-6$ Gelenkeinstellungen aus anderen Vorgaben als der der Zielstellung des Effektors bestimmt werden. Verletzen nun diese $F-6$ Gelenke in ihrem *gesamten* Bewegungsbereich die für die verbleibenden sechs Gelenke

geforderten Konstruktionsvoraussetzungen *nicht*, dann können diese F-6 Gelenkvariablen wie Konstanten behandelt werden und auf die restlichen sechs Gelenkvariablen kann die Abstandsbetrachtung angewandt werden. Dies bedeutet konkret, daß eines der F-6 überzähligen Gelenke, sofern es sich in der kinematischen Kette zwischen zwei an einem Schnittpunkt 2S bzw. 3S beteiligten Gelenken befindet, durch sein Bewegungsverhalten kein anderes Gelenk aus diesem Schnittpunkt herausbewegen darf.

Ist nach der Anwendung von Positionswert- und Abstandsbetrachtung die dritte aus der Positionsspalte der homogenen 4×4-Matrix zu bestimmende Variable eine Rotationsvariable, so kann die Lösung aus zwei verschiedenen Gleichungen immer eindeutig und korrekt ermittelt werden; dies zeigt der folgende Satz:

Satz: Bestimmung einer Rotationsvariablen aus der Positionsspalte

Sind nach erfolgreicher Positions- und Abstandsbetrachtung anhand der kinematischen Gleichung $\mathbf{R}(\mathbf{z}, x) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ die beiden Gleichungen

$$3.4: \quad X_{34} = Y_{34} \quad \text{und}$$

$$1.4^2 + 2.4^2 + 3.4^2: \quad X_{14}^2 + X_{24}^2 + X_{34}^2 = Y_{14}^2 + Y_{24}^2 + Y_{34}^2$$

erfüllt, dann ist die Rotationsgelenkvariable x aus 1.4 und 2.4 eindeutig und korrekt berechenbar:

$$x = \text{ATAN2}(X_{14} \cdot Y_{24} - X_{24} \cdot Y_{14}, X_{14} \cdot Y_{14} + X_{24} \cdot Y_{24})$$

Gilt außerdem $X_{14}=0$ und $X_{24}=0$, dann sind die Gleichungen 1.4 und 2.4 auch für beliebig wählbares x immer erfüllt. In diesem Fall handelt es sich um eine erreichbare für die Variable x .

Beweis

Die kinematische Gleichung liefert folgende Einzelgleichungen:

$$1.4: \quad \cos(x) \cdot X_{14} - \sin(x) \cdot X_{24} = Y_{14}$$

$$2.4: \quad \sin(x) \cdot X_{14} + \cos(x) \cdot X_{24} = Y_{24}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\sin(x) = (X_{14} \cdot Y_{24} - X_{24} \cdot Y_{14}) / (X_{14}^2 + X_{24}^2)$$

$$\cos(x) = (X_{14} \cdot Y_{14} + X_{24} \cdot Y_{24}) / (X_{14}^2 + X_{24}^2)$$

$$\text{oder abgekürzt: } \sin(x) = a; \quad \cos(x) = b$$

Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ definitionsgemäß gegeben ist, muß auch $a^2 + b^2 = 1$ gelten; andernfalls existiert keine Lösung für die Rotationsgelenkvariable x , die beide Gleichungen 1.4 und

2.4 korrekt erfüllt. Zum Nachweis von $a^2+b^2=1$ quadrieren und addieren wir die obigen Bestimmungsgleichungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = (Y_{14}^2 + Y_{24}^2) \cdot (X_{14}^2 + X_{24}^2) / (X_{14}^2 + X_{24}^2)^2$$

Da aus 1.4²+2.4²+3.4² und 3.4 folgt

$$X_{14}^2 + X_{24}^2 = Y_{14}^2 + Y_{24}^2$$

ist der Beweis für $X_{14}^2 + X_{24}^2 \neq 0$ erbracht.

Im Fall $X_{14}^2 + X_{24}^2 = 0$ gilt mit $X_{14}^2 + X_{24}^2 = Y_{14}^2 + Y_{24}^2 = 0$, daß sowohl $Y_{14}=0$ als auch $Y_{24}=0$ sein muß. Damit sind Gleichung 1.4 und 2.4 auch für diesen Fall korrekt erfüllt.

Falls $X_{14} \neq 0$ oder $X_{24} \neq 0$ ist, erhalten wir die Lösung

$$x = \text{ATAN2}(X_{14} \cdot Y_{24} - X_{24} \cdot Y_{14}, X_{14} \cdot Y_{14} + X_{24} \cdot Y_{24})$$

Falls $X_{14}=X_{24}=0$, ist x beliebig wählbar (Reduktionsstellung).

2.3.5 Distanzbetrachtung

Dieses Verfahren ist aus einem Lösungsansatz mit Polynomen vom Grad vier durch Einschränkung der zugrundeliegenden Roboterklasse hervorgegangen; Ideen und Anregungen dazu kamen u.a. aus [Hiller 86], [Waldhauser 87] und [Yang 69] und basierten im wesentlichen darauf, daß durch die Gelenkbewegung zweier Rotationsachsen die Distanz zwischen diesen Achsen nicht beeinflußt wird. Existieren in der Roboterkonstruktion zwei weitere, zu je einer der Rotationsachsen parallele Translationsachsen, so verändern auch die Translationsvariablen die Distanz zwischen den Rotationsachsen nicht. Daher treten in der Distanzgleichung dieses Roboters nur die zwei restlichen Gelenkvariablen auf und es bleibt zu untersuchen, welche zusätzlichen Bedingungen die Roboterkonstruktion erfüllen muß, damit diese zwei Variablen in expliziter, quadratischen Form berechnet werden können.

Da die Roboterkonstruktion mit drei Translationsgelenken schon bei der Orientierungsbetrachtung erfaßt werden, bleiben sie hier unberücksichtigt. Mit der Distanzbetrachtung kann eine quadratische Lösung immer dann gefunden werden, wenn zwischen den zu den beiden Translationsachsen parallelen Rotationsachsen genau ein weiteres Rotationsgelenk existiert, das keinen Versatz entlang der Rotationsachse aufweist ($h=0$).

Seien diese beiden Rotationsgelenke mit C_1 und C_3 , das zwischenliegende Rotationsgelenk mit R_2 ($=d_2, 0, l_2, \alpha_2$) und das vierte Rotationsgelenk mit R_4 bezeichnet. Werden nun Bezug- und Zielsystem jeweils in das Koordinatensystem der Gelenke C_1 und C_3 gelegt, so liefern die Einzelgleichungen 3.3 und 1.4·2.3-2.4·1.3 (Distanzgleichung) zwei Gleichungen für $\cos(d_2)$, deren rechte Seiten noch die Terme $\sin(d_4)$ und $\cos(d_4)$ enthalten. Gleichsetzen der beiden rechten Seiten ergibt dann eine Gleichung, aus der die

Variable d_4 des Rotationsgelenks R_4 explizit quadratisch berechnet werden kann. Falls die Gelenkachse von R_2 senkrecht auf beiden Gelenkachsen von C_1 und C_3 steht, genügt sogar die Gleichung 1.4.2.3-2.4.1.3 alleine zur Berechnung der Variablen d_4 . Im Abschnitt 2.4.2 wird im Zusammenhang mit Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung mit Grad vier auch auf eine Obermenge dieser Roboterklasse eingegangen und dort sind die hier erwähnten Gleichungen aufgelistet.

Nach der Berechnung der Variablen d_4 können die restlichen drei Rotationsvariablen d_1 , d_2 und d_3 mit Hilfe der Orientierungsbetrachtung ermittelt werden und zum Schluß lassen sich die beiden Translationsvariablen aus einem linearen System berechnen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß bei dieser Roboterklasse eine lokale Degeneration bei der Ermittlung der Translationsvariablen existieren kann.

2.3.6 Anwendung der Positionswertbetrachtung auf den ASEA-IR B6

Da der ASEA-IR B6 mit Knickhand die Voraussetzungen für die Anwendung der Positionswertbetrachtung erfüllt, benutzen wir nicht die in Abschnitt 2.1.6 berechnete Matrix \mathbf{M} und die zugehörige kinematische Gleichung, sondern es wird als erstes aus der vorgegebenen Zielstellung \mathbf{Z} des Effektors die für das Verfahren besser geeignete Zielmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{z}_6, -L_6) \cdot \mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{TR})^{-1}$ gebildet.

Der Ansatz $\mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{Z}_5 = \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_6 \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_6, d_6))^{-1}$ ermöglicht aus 3.4 eine Bestimmung der Variablen d_1 (Positionswertbetrachtung) und – mit berechnetem d_1 – aus 3.3 eine Bestimmung der Variablen d_6 (Orientierungsbetrachtung).

$$3.4: \quad 0 = W_{14} \cdot \sin(d_1) - W_{24} \cdot \cos(d_1)$$

Damit wird

$$d_{1a} = \text{ATAN2}(W_{24}, W_{14}) \quad d_{1b} = \text{ATAN2}(-W_{24}, -W_{14})$$

Eine Reduktionsstellung für d_1 liegt vor, falls $W_{14}=0$ und $W_{24}=0$; d.h. der Ursprung des Zielsystems \mathbf{W} liegt auf der Achse \mathbf{z}_1 und ist daher positionsinvariant gegen Drehungen des Gelenks 1. Die Positionsinvarianz ist in diesem Fall ausreichend, da bei dieser Roboterkonstruktion die Orientierungsänderung, die durch ein beliebig gewähltes d_1 hervorgerufen wird, durch die letzten zwei Orientierungsgelenke ausgeglichen werden kann, ohne dabei das Zielsystem \mathbf{W} von seiner Position auf der Achse zu entfernen. Diese geometrische Argumentation nimmt sehr stark Bezug auf die vorliegende Roboterkonstruktion; ein allgemeines Interpretationsprinzip läßt sich daraus nicht ableiten. Damit zeigt sich der Vorteil der von uns gewählten abstrakten Definition für das Vorliegen einer Reduktionsstellung (vgl. Ende Abschnitt 2.3.2: $c(\dots, w_c, \dots)=0$).

$$\begin{aligned}
3.3: \quad 0 = & \sin(d_6) \cdot \cos(k) \cdot \{ \cos(d_1) \cdot W_{21} - \sin(d_1) \cdot W_{11} \} \\
& + \cos(d_6) \cdot \cos(k) \cdot \{ \cos(d_1) \cdot W_{22} - \sin(d_1) \cdot W_{12} \} \\
& + \sin(k) \cdot \{ \sin(d_1) \cdot W_{13} - \cos(d_1) \cdot W_{23} \}
\end{aligned}$$

Eine globale liegt für $k=(n+0,5) \cdot \pi$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$, vor. Da W_{13} und W_{23} beliebige Werte annehmen können, ist das Verschwinden des Faktors $\{ \sin(d_1) \cdot W_{13} - \cos(d_1) \cdot W_{23} \}$ nicht garantiert. Damit ist 3.3 nicht korrekt erfüllt.

Eine Reduktionsstellung entsteht, wenn beide Faktoren von $\sin(d_6)$ und $\cos(d_6)$ gleich Null sind und der Restterm konstant und von der Zielstellung unabhängig ist; dies ist nur für $k=n \cdot \pi$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$, und $\cos(d_1) \cdot W_{21} = \sin(d_1) \cdot W_{11}$ und $\cos(d_1) \cdot W_{22} = \sin(d_1) \cdot W_{12}$ möglich.

Unerreichbare (Orientierungs-)en treten für $k \neq n \cdot \pi$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$, auf und werden durch einen negativen Radikanden in der Lösungsformel sichtbar.

Ist die Berechnung von d_6 nicht an einer unerreichbaren Stellung bzw. an einer Degeneration gescheitert, dann kann aus 1.3 und 2.3 bzw. aus 3.1 und 3.2 eindeutig die (korrekte) Variable d_4 bzw. d_5 bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
d_4 = & \text{ATAN2}(\sin(d_1) \cdot \{ \cos(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{21} + \cos(d_6) \cdot W_{22}) - \sin(k) \cdot W_{23} \} \\
& + \cos(d_1) \cdot \{ \cos(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{11} + \cos(d_6) \cdot W_{12}) - \sin(k) \cdot W_{13} \} , \\
& -\cos(k) \cdot \{ \sin(d_6) \cdot W_{31} + \cos(d_6) \cdot W_{32} \} + \sin(k) \cdot W_{33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_5 = & \text{ATAN2}(\sin(d_1) \cdot \{ \sin(d_6) \cdot W_{12} - \cos(d_6) \cdot W_{11} \} \\
& - \cos(d_1) \cdot \{ \sin(d_6) \cdot W_{22} - \cos(d_6) \cdot W_{21} \} , \\
& -\sin(d_1) \cdot \{ \sin(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{11} + \cos(d_6) \cdot W_{12}) + \cos(k) \cdot W_{13} \} \\
& + \cos(d_1) \cdot \{ \sin(k) \cdot (\sin(d_6) \cdot W_{21} + \cos(d_6) \cdot W_{22}) + \cos(k) \cdot W_{23} \})
\end{aligned}$$

Hinsichtlich der Berechnung der Variablen d_4 sei auf die in Abschnitt 2.1.6 erläuterte Substitution der Gelenkvariablen d_3 und d_4 durch d_3-d_2 und d_4-d_3 verwiesen.

Um die noch unbestimmten Variablen d_2 und d_3 berechnen zu können, muß – nach schon erfolgter Anwendung der Positionswert- und Orientierungsbetrachtung – auf die Abstandsbetrachtung zurückgegriffen werden (Distanzbetrachtung kommt nur bei zwei Translationsgelenken in Frage). Hier zeigt sich ein Vorteil der streng formalen Vorgehensweise bei der Lösung der kinematischen Gleichung; diese Methodik vereinfacht die Suche nach möglichen Lösungswegen und unterstützt das Vorhaben, die Berechnung der Gelenkvariablen weitgehend rechnergestützt und automatisch ablaufen zu lassen.

In diesem fortgeschrittenen Stadium der Gelenkwinkelberechnung bieten sich mehrere mögliche Ansätze zur Abstandsbetrachtung, insbesondere dann, wenn die durch die Berechnung von d_1 , d_4 , d_5 und d_6 gültigen Beziehungen in die Ansätze mit eingebracht werden. Diese Strategie führt auch zu einer deutlichen Reduzierung der Komplexität der Lösungsformeln für d_2 und d_3 .

In unserem Beispiel ist durch die schon verwendeten Einzelgleichungen 3.4, 3.3, 1.3, 2.3, 3.1 und 3.2 und durch den Rückgriff auf den Satz über die vollständige Bestimmtheit einer homogenen 4×4 - Matrix folgende Äquivalenz für die rechte Seite unseres Ansatzes gegeben:

$$\mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{X}_6 \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_6, d_6))^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(d_4) \cdot \cos(d_5) & -\cos(d_4) \cdot \sin(d_5) & -\sin(d_4) & W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1) \\ \sin(d_4) \cdot \cos(d_5) & -\sin(d_4) \cdot \cos(d_5) & \cos(d_4) & W_{34} \\ -\sin(d_5) & -\cos(d_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sei die Matrix auf der rechten Seite dieser Äquivalenz bezeichnet mit \mathbf{A} , dann sind z.B. folgende Ansätze für die Abstandsbetrachtung geeignet:

$$\mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{Z}_3 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{Z}_5)^{-1} \quad \{\text{Berechnung von } d_3\}$$

$$\mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_5, d_5) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}_5, -L_H)^{-1} \quad \{\text{Berechnung von } d_3 - d_2\}$$

$$\mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}_5, d_5) = \mathbf{D}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}_5, -L_H)^{-1} \quad \{\text{Berechnung von } d_2\}$$

Der bisher für die Positionswert- und Orientierungsbetrachtung verwendete Ansatz ist für die Abstandsbetrachtung nicht geeignet; denn wegen der statischen Gelenke G_3 und G_4 wird der Abstand zwischen dem Bezugssystem S_2 und dem Zielsystem S_{X6} von den (noch unbestimmten) Gelenkvariablen $d_3 - d_2$ und $d_4 - d_3$ bzw. nach Zusammenfassen der Variablen paralleler Gelenke von d_2 und d_3 beeinflusst.

Die Komplexität der aus den oben angeführten Ansätzen ableitbaren Formeln für d_2 und d_3 ist nur geringfügig verschieden, wir verwenden im weiteren den Ansatz

$$\text{II) } \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{Z}_3 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{Z}_5)^{-1}$$

$$\text{II1.4: } L_1 \cdot \cos(d_2) = -L_2 \cdot \cos(d_3) - L_H \cdot \sin(d_4) + W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)$$

$$\text{II2.4: } L_1 \cdot \sin(d_2) = -L_2 \cdot \sin(d_3) + L_H \cdot \cos(d_4) + W_{34}$$

$$\text{II3.4: } 0 = 0.$$

Die Abstandsbetrachtung $\text{II1.4}^2 + \text{II2.4}^2 + \text{II3.4}^2$ liefert die Gleichung

$$L_1^2 = \{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)\}^2 + W_{34}^2 + L_H^2 + L_2^2$$

$$- 2 \cdot \sin(d_4) \cdot L_H \cdot \{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)\} + 2 \cdot \cos(d_4) \cdot L_H \cdot W_{34}$$

$$- 2 \cdot \sin(d_3) \cdot L_2 \cdot \{W_{34} + L_H \cdot \cos(d_4)\}$$

$$- 2 \cdot \cos(d_3) \cdot L_2 \cdot \{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1) - L_H \cdot \sin(d_4)\}$$

und daraus kann die Variable d_3 berechnet werden; wird der Radikand negativ, so ist die Zielstellung.

Aus II1.4 und II2.4 folgt (bei positivem L_1):

$$d_2 = \text{ATAN2}(W_{34} - L_2 \cdot \sin(d_3) + L_H \cdot \cos(d_4), \\ W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1) - L_2 \cdot \cos(d_3) - L_H \cdot \sin(d_4)).$$

Da verschiedene Ansätze für die Positionswert- und Abstandsbetrachtung herangezogen wurden, kann der im Abschnitt 2.3.4 angeführte Satz nicht zur Berechnung von d_2 verwendet werden; die Existenz des statischen Gelenks G_3 und das damit verbundene Auftreten der Gelenkvariablen d_2 in *zwei* Übergangsmatrizen $\mathbf{D}_{i,i+1}$ verhindert eine Anwendung des Satzes. Mit $L_1 \neq 0$ existiert immer eine Möglichkeit, d_2 zu berechnen, d.h. keine Reduktion oder Degeneration für d_2 , und die Korrektheit der beiden Gleichungen $\sin(d_2)=a$ und $\cos(d_2)=b$, d.h. $a^2+b^2=1$, ist durch die Abstandsbetrachtung gesichert.

In der Abstandsbetrachtung kann $\{W_{14} \cdot \cos(d_1) + W_{24} \cdot \sin(d_1)\}^2$ zu $W_{14}^2 + W_{24}^2$ vereinfacht werden; dazu wird auf die Gleichung 3.4: $0 = W_{14} \cdot \sin(d_1) - W_{24} \cdot \cos(d_1)$ zurückgegriffen. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn bei der Vereinfachung der Matrix A die Gleichung 3.4 nicht berücksichtigt wird und in 3.4 statt 0 der Term $W_{14} \cdot \sin(d_1) - W_{24} \cdot \cos(d_1)$ stehen bleibt.

2.3.7 Einfluß verschiedener Ansätze auf die Lösungsstruktur am Beispiel des GdA06

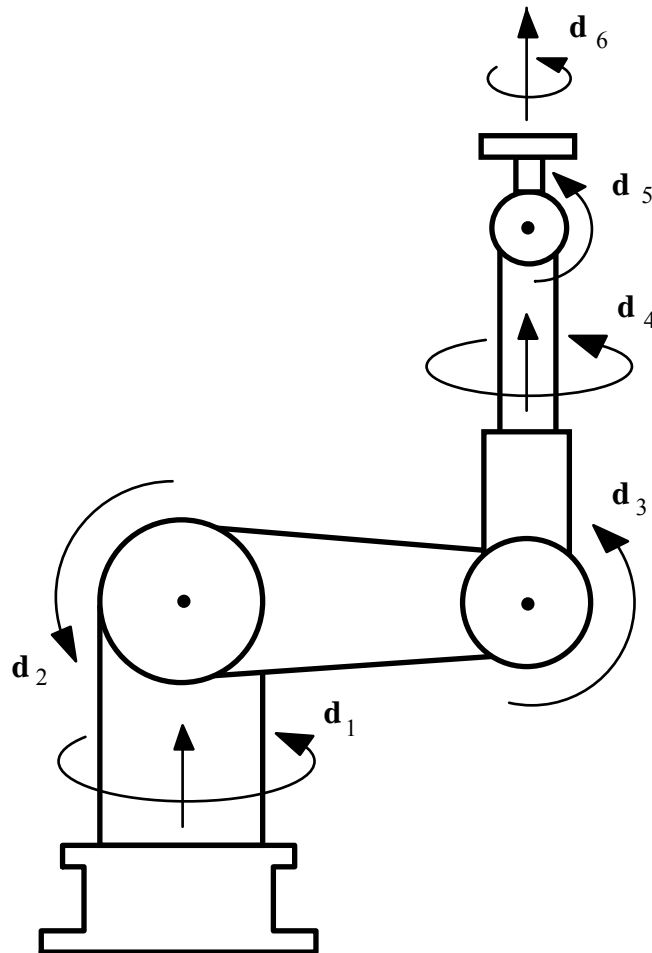


Abb. 2.5: Roboter GdA06

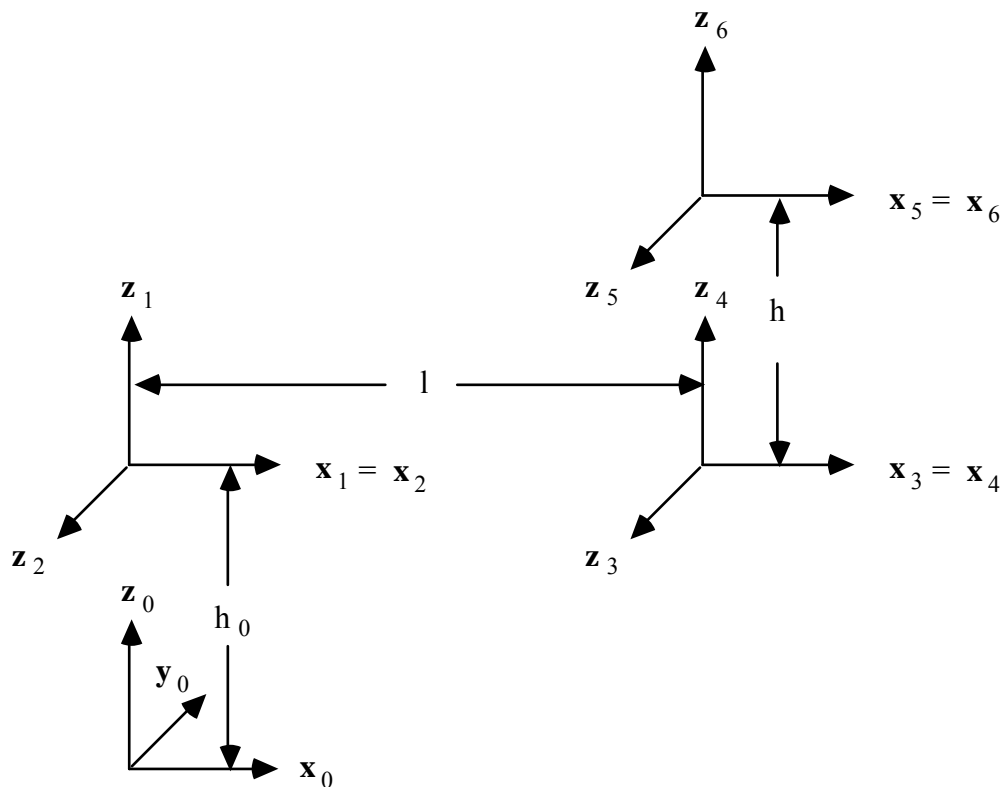


Abb. 2.6: Stellung der Gelenkkoordinatensysteme S_i des Roboters GdA06 bei Gelenk-Null-Lage

Der Roboter GdA06 wird – bei optimal gewählten Gelenk-Null-Lagen – durch folgende charakteristische Kenndaten beschrieben:

Gelenk	δ_i	η_i	l_i	α_i
1	d_1	0	0	90°
2	d_2	0	1	0°
3	d_3	0	0	-90°
4	d_4	h	0	90°
5	d_5	0	0	-90°
6	d_6	0	0	0°

Diese Roboterkonstruktion ist sowohl für die Anwendung der Positionswertbetrachtung als auch der Abstandsbetrachtung geeignet. Mit dem Ansatz

$$I) \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

können aus I3.4 die Variable d_1 (Positionswertbetrachtung) und aus I1.4²+I2.4²+I3.4² (Abstandsbetrachtung) die Variable d_3 unabhängig voneinander berechnet werden.

Positionswertbetrachtung

Aus I3.4: $0 = \sin(d_1) \cdot W_{14} - \cos(d_1) \cdot W_{24}$

Falls $W_{14}=0$ und $W_{24}=0$, dann ist d_1 beliebig wählbar (Reduktionsstellung),

sonst $d_{1a} = \text{ATAN2}(W_{24}, W_{14})$ {der Zielstellung zugewandt, vgl. Abb. 2.7 links}

$d_{1b} = \text{ATAN2}(-W_{24}, -W_{14})$ {der Zielstellung abgewandt, vgl. Abb. 2.7 rechts}

Bei ähnlich gebauten Roboterkonstruktionen mit einem zusätzlichen Versatz h_2 zwischen Gelenk 1 und Gelenk 2 (z.B. PUMA 560 von Unimation) werden die zwei möglichen Gelenkstellungen von d_1 oft als *rechtshändig* bzw. *linkshändig* unterschieden; diese Begriffsbildung ist allerdings beim GdA06 nicht plausibel, weil hier $h_2=0$ ist.

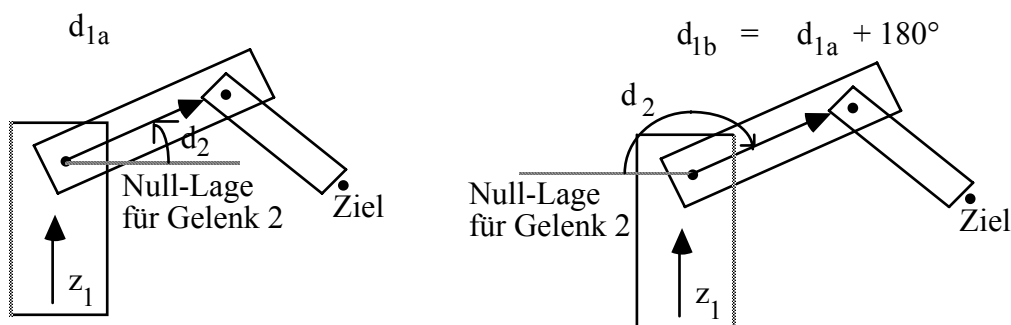


Abb. 2.7: Zweideutigkeit der Gelenkstellung d_1

Abstandsbetrachtung

Aus I1.4²+I2.4²+I3.4²: $h^2 + l^2 - 2 \cdot h \cdot l \cdot \sin(d_3) = W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2$

Daraus folgt

$$\sin(d_3) = (h^2 + l^2 - W_{14}^2 - W_{24}^2 - W_{34}^2) / (2 \cdot h \cdot l) = a$$

$$\cos(d_3) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(d_3)} = \pm \sqrt{1 - a^2}$$

Die Lösung ergibt sich dann zu

$$d_{3a} = \text{ATAN2}(a, +\sqrt{1-a^2}) \quad d_{3b} = \text{ATAN2}(a, -\sqrt{1-a^2})$$

Eine Stellungunerreichbare Zielvorgabe liegt vor, falls der Radikand $1-a^2$ negativ wird.

Eine isolierte Aussage, ob d_{3a} oder d_{3b} der nach oben bzw. unten gerichteten Gelenkstellung (vgl. Abb. 2.8) entspricht, kann nicht getroffen werden, da dies von der für die Variable d_1 gewählten Lösung abhängt. Wir kommen hier in Bereiche, in denen die dem Anwender plausiblen Begriffe "Ellbogen unten" und "Ellbogen oben" eher zu Fehlinterpretationen führen, weil diese Begriffsbildung nicht für das gesamten Bewegungsintervall von Gelenk 2 plausibel bleibt. Im Falle der Gelenkvariablen d_3 bleibt damit für die Unterscheidung der zwei Lösungen nur der Rückgriff auf das Vorzeichen der

Wurzel bzw. Aussagen darüber, ob der Winkelwert im Bereich $[-90^\circ \dots 90^\circ]$ oder $[90^\circ \dots 270^\circ]$ liegen soll.

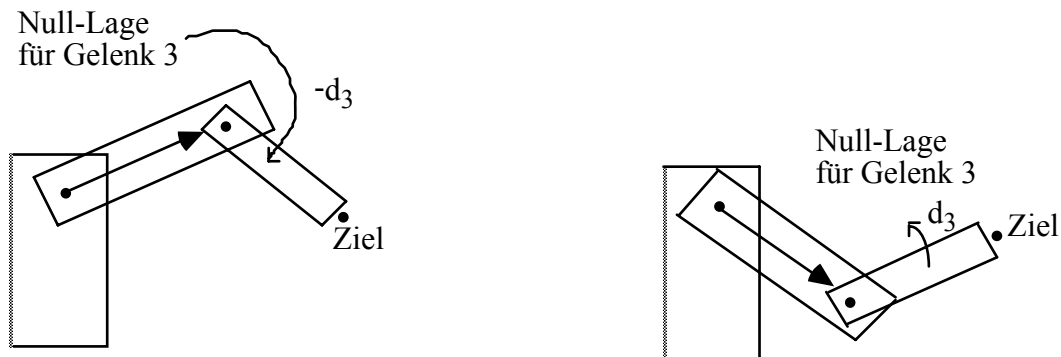


Abb. 2.8: Zweideutigkeit der Gelenkstellung d_3 (für festen Wert d_1)

Berechnung der Rotationsvariablen d_2 aus der Positionsspalte

Zur Berechnung der Variablen d_2 kann der Satz (Bestimmung einer Rotationsvariablen aus der Positionsspalte) aus Abschnitt 2.3.4 herangezogen werden; Ansatz

$$1) \quad \mathbf{D}_{2,3} \cdot \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

wird entsprechend den Vorgaben des Satzes dargestellt durch $\mathbf{R}(\mathbf{z}, d_2) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ mit:

$$X_{14} = -\sin(d_3) \cdot h + 1$$

$$X_{24} = \cos(d_3) \cdot h$$

$$Y_{14} = \cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}$$

$$Y_{24} = W_{34}$$

Hieraus ergibt sich

$$d_2 = \text{ATAN2}((- \sin(d_3) \cdot h + 1) \cdot W_{34} - \cos(d_3) \cdot h \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}), \\ (- \sin(d_3) \cdot h + 1) \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}) + \cos(d_3) \cdot h \cdot W_{34})$$

und eine bei $X_{14}=0$ und $X_{24}=0$ vorliegende Reduktionsstellung für d_2 ist laut Satz immer erreichbar.

Alternativer Lösungsansatz

Gerade für Roboter mit günstiger mechanischer Konstruktion gibt es mehrere unterschiedliche Ansätze, die zur Lösung einer Variablen herangezogen werden können. Ein systematisches Vorgehen anhand der hier vorgestellten Verfahren erweist sich jedoch – wie am folgenden Beispiel dargestellt – als effizienter.

Wird nach der Berechnung der Variablen d_1 mittels Positionswertbetrachtung nicht erkannt, daß der Ansatz I auch für die Abstandsbetrachtung optimal geeignet ist, und zu dem Ansatz

$$\text{II) } \mathbf{D}_{3,4} \cdot \mathbf{D}_{4,5} \cdot \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

übergegangen, so führt das zwar zu Lösungen mit annähernd gleicher Komplexität, aber auch zum Verlust der voneinander unabhängigen Berechnungsmöglichkeit für d_1 und d_3 bzw. d_2 . Der Ansatz II dient ebenfalls zur Anwendung der Abstandsbetrachtung, die Auswahl von Bezug- und Zielsystem ist jedoch nicht optimal getroffen, da sowohl d_1 als auch d_2 den Abstand zwischen Bezug- und Zielsystem bestimmen und somit die vorangegangene Berechnung von d_1 eine wesentliche Bedingung für die Anwendbarkeit von Ansatz II ist (im Ansatz I bestimmt nur die Gelenkvariable d_3 den Abstand).

Aus $\text{II}1.4^2 + \text{II}2.4^2 + \text{II}3.4^2$:

$$h^2 = W_{14}^2 + W_{24}^2 + W_{34}^2 + l^2 - \cos(d_2) \cdot 2 \cdot l \cdot (\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}) - \sin(d_2) \cdot 2 \cdot l \cdot W_{34}$$

Umgeformt und abgekürzt ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\sin(d_2) \cdot a - \cos(d_2) \cdot b = c$$

und daraus die Lösung:

$$d_{2a,b} = \text{ATAN2}(c, \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}) + \text{ATAN2}(b, a)$$

Unerreichbar ist die Zielvorgabe, falls der Radikand $a^2 + b^2 - c^2$ negativ ist. Für $W_{14} = W_{24} = W_{34} = 0$ verschwindet die Variable d_2 aus der Abstandsgleichung, es bleibt $h^2 = l^2$; damit liegt eine Reduktionsstellung für d_2 vor, die nur für $l = \pm h$ erreichbar ist.

Ein Versuch, die in der Abstandsgleichung im Term $\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}$ auftretende Variable d_1 durch Einsetzen der vorher schon ermittelten Lösungsformel zu eliminieren, scheitert. Mit

$$\text{I3.4: } 0 = \sin(d_1) \cdot W_{14} - \cos(d_1) \cdot W_{24} \text{ (Positionswertbetrachtung)}$$

gilt zwar

$$\sin(d_1) = \cos(d_1) \cdot W_{24} / W_{14},$$

$$\text{und aus } \sin^2(d_1) + \cos^2(d_1) = 1$$

folgt

$$\cos^2(d_1) \cdot (W_{24}^2 + W_{14}^2) / W_{14}^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \cos(d_1) = \pm \frac{W_{14}}{\sqrt{W_{24}^2 + W_{14}^2}}$$

und damit gilt

$$\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24} = \pm \left(\frac{W_{14}^2}{\sqrt{W_{14}^2 + W_{24}^2}} + \frac{W_{24}^2 \cdot W_{14}}{W_{14} \cdot \sqrt{W_{14}^2 + W_{24}^2}} \right) = \pm \sqrt{W_{14}^2 + W_{24}^2},$$

doch da die Gültigkeit des Vorzeichens bei

$$\cos(d_1) = \pm \frac{W_{14}}{\sqrt{W_{24}^2 + W_{14}^2}}$$

von der in der Positionswertbetrachtung für d_1 gewählten Lösungsvariante abhängt, kann d_1 nur aus dem Term $\text{ATAN2}(c, \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2})$, nicht jedoch aus dem Term $\text{ATAN2}(b, a)$ der für $d_{2a,b}$ angegebenen Formel eliminiert werden. Deshalb können bei dieser Variante im Gegensatz zum Ansatz I d_1 und d_2 nicht unabhängig voneinander berechnet werden. Dies ist ein schwerwiegender Nachteil, wenn wir beispielsweise an Rechnerarchitekturen mit parallelen Prozessoren denken, wo die Bestimmung von d_1 und d_2 sonst parallel erfolgen könnte.

Nach der Ermittlung der Variablen d_1 und d_2 kann dann die Variable d_3 aus I1.4 und I2.4 errechnet werden.

$$\text{I1.4: } -\sin(d_3) \cdot h + l = \cos(d_2) \cdot \{\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}\} + \sin(d_2) \cdot W_{34}$$

$$\text{I2.4: } \cos(d_3) \cdot h = -\sin(d_2) \cdot \{\cos(d_1) \cdot W_{14} + \sin(d_1) \cdot W_{24}\} + \cos(d_2) \cdot W_{34}$$

Bestimmung der restlichen Variablen aus dem Orientierungsteil

Unabhängig davon, nach welcher Variante die Variablen aus der Positionsspalte bestimmt wurden, können die restlichen drei (Orientierungs-)Variablen d_4 , d_5 und d_6 mit Hilfe der Orientierungsbetrachtung berechnet werden. Dazu wird der Ansatz

$$\text{III) } \mathbf{D}_{5,6} \cdot \mathbf{D}_{6,7} = \mathbf{D}_{4,5}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{3,4}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{W} \quad \text{zugrundegelegt.}$$

$$\begin{aligned} \text{Aus III3.3: } 0 &= \sin(d_4) \cdot \{\cos(d_2 + d_3) \cdot [\cos(d_1) \cdot W_{13} + \sin(d_1) \cdot W_{23}] + \sin(d_2 + d_3) \cdot W_{33}\} \\ &\quad - \cos(d_4) \cdot \{\cos(d_1) \cdot W_{23} - \sin(d_1) \cdot W_{13}\} \end{aligned}$$

$$\text{abgekürzt: } 0 = \sin(d_4) \cdot a - \cos(d_4) \cdot b$$

ergibt sich die Lösung, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$,

$$d_{4a} = \text{ATAN2}(b, a)$$

$$d_{4b} = \text{ATAN2}(-b, -a) = d_{4a} + \pi$$

Ist $a=b=0$, ergibt sich eine Reduktionsstellung und d_4 ist beliebig wählbar.

Aus der Lösungsgleichung läßt sich ablesen, daß für alle Orientierungsvorgaben mindestens zwei Lösungswerte gefunden werden können; diese Aussage gilt immer dann, wenn die Rotationsachsen der Orientierungsgelenke aufeinander senkrecht stehen.

Eindeutige und korrekte Werte für die Variable d_5 bzw. d_6 können aus den Gleichungen III1.3 und III2.3 bzw. III3.1 und III3.2 hergeleitet werden. Damit erhalten wir für jede Zielvorgabe acht verschiedene Lösungstupel für die Gelenkvariablen.

2.3.8 Zusammenstellung der explizit quadratisch lösbaren Roboterklassen

Ausgehend von den Voraussetzungen der in Abschnitt 2.3.2 bis Abschnitt 2.3.5 beschriebenen quadratischen Lösungsverfahren werden Roboterklassen definiert, die für die Anwendung eines der vier beschriebenen Lösungsverfahren geeignet sind. Die folgende Betrachtung bezieht sich auf Roboter mit dem Getriebefreiheitsgrad $F = 6$ bzw. auf die sechs noch unbestimmten Gelenke bei einem Getriebefreiheitsgrad $F > 6$; in Klammern ist jeweils das erste anzuwendende Verfahren zur Berechnung der Gelenkvariablen angegeben:

1. Roboter mit drei Translationsgelenken (Orientierungsbetrachtung)
2. Roboter mit zwei Translationsgelenken und zwei zueinander parallelen Rotationsgelenken (Orientierungsbetrachtung)
3. Roboter mit zwei Translationsgelenken und drei sich schneidenden Rotationsgelenken (Positionswertbetrachtung)
4. Roboter mit zwei sich schneidenden Rotationsgelenken und einem weiteren Rotationsgelenk, das senkrecht auf zwei Translationsgelenken steht (Positionswertbetrachtung)
5. Roboter mit einem Translationsgelenk und drei zueinander parallelen Rotationsgelenken (Orientierungsbetrachtung)
6. Roboter mit zweimal zwei zueinander parallelen Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk, das senkrecht auf einem der parallelen Rotationsachsenpaare steht (Orientierungsbetrachtung)
7. Roboter mit zwei sich schneidenden Rotationsgelenken und zwei weiteren zueinander parallelen Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk, das senkrecht auf diesen zwei parallelen Rotationsgelenken steht (Positionswertbetrachtung)
8. Roboter mit drei sich schneidenden Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk, das senkrecht auf einem weiteren Rotationsgelenk steht (Positionswertbetrachtung)
9. Roboter mit drei sich schneidenden und weiteren zwei sich schneidenden Rotationsgelenken (Abstandsbetrachtung)
10. Roboter mit drei zueinander parallelen Rotationsgelenken und weiteren zwei zueinander parallelen Rotationsgelenken:

Das sechste (nicht im Sinne einer kinematischen Reihenfolge!) Gelenk muß ein Rotationsgelenk sein, da sonst eine globale Orientierungsdegeneration vorliegt. (Orientierungsbetrachtung)

11. Roboter mit zwei sich schneidenden Rotationsgelenken und drei weiteren zueinander parallelen Rotationsgelenken:
Das sechste (nicht im Sinne einer kinematischen Reihenfolge!) Gelenk ist ein Rotationsgelenk, da sonst die Konstellation unter den Punkt 5 fällt. (Positionswertbetrachtung)
12. Roboter mit drei sich schneidenden Rotationsgelenken und zwei weiteren zueinander parallelen Rotationsgelenken (Positionswertbetrachtung)
13. Roboter mit zwei Translationsgelenken, die zu je einem Rotationsgelenk parallel sind, und einem weiteren Rotationsgelenk, das sich als einziges Gelenk zwischen diesen beiden Paaren paralleler Translations- und Rotationsgelenke befindet und keinen Versatz entlang seiner Rotationsachse aufweist (Distanzbetrachtung)

