2.4 Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung mit Grad vier

2.4.1 Roboterkonstruktionen mit drei sich schneidenden Rotationsachsen

Alle Roboter mit drei sich schneidenden Rotationsgelenken führen auf Bestimmungsgleichungen für die Gelenkvariablen, die Polynome vom Grad ≤ 4 sind [Pieper 69].

Der Abschnitt 2.3.8 zeigt, daß die hier betrachteten Roboterkonstruktionen mit zwei und drei Translationsgelenken sogar zu quadratischen Lösungspolynome führen. Wir beschränken uns daher auf Roboter mit sechs Rotationsgelenken oder mit fünf Rotationsgelenken und einem Translationsgelenk. Den Beweis für obige Behauptung führen wir auf der Basis der hier entwickelten Theorie und verwenden folgenden Ansatz: das Koordinatensystem S_i eines nicht am Dreifach-Schnittpunkt 3S beteiligten Rotationsgelenks wird als Bezugsystem und der Schnittpunkt 3S der drei Rotationsachsen als Ursprung des Zielsystems gewählt. Dieser Ansatz kann immer erreicht werden; falls in der kinematischen Kette kein zusätzliches Rotationsgelenk vor dem Dreifach-Schnittpunkt 3S existiert, kann durch Invertierung der gesamten kinematischen Gleichung Abhilfe geschaffen werden.

Zur Bestimmung der Gelenkvariablen werden die z-Positionswertgleichung (3.4) und die Abstandsgleichung benötigt; nach den in Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4 erläuterten geometrischen Überlegungen enthalten beide Gleichungen nur noch die beiden Gelenkvariablen der nicht im Bezugsystem liegenden und nicht am Dreifach-Schnittpunkt 3S beteiligten Gelenke. Da nach den Eingangsüberlegungen maximal ein Translationsgelenk in der Konstruktion zugelassen ist, tritt in den beiden Gleichungen mindestens eine Rotationsvariable auf.

Roboter mit sechs Rotationsachsen

Aus der kinematischen Grundgleichung kann (notfalls durch Invertierung) immer der Ansatz $\mathbf{R}_1 \bullet \mathbf{R}_2 \bullet \mathbf{A} = \mathbf{B}$ erzeugt werden; $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ sind dabei homogene Transformationsmatrizen von Rotationsgelenken, **A** und **B** enthalten die restlichen Variablen und die Zielvorgabe **W**. Konstante D-H-Parameter sind soweit wie möglich schon in die Zielstellung **W** integriert. Das durch **A** definierte Zielsystem liegt mit seinem Ursprung im Dreifach-Schnittpunkt 3S. Die D-H-Parameter der drei am Dreifach-Schnittpunkt 3S beteiligten Rotationsgelenke werden mit den Indizes 3S1, 3S2 und 3S3 gekennzeichnet und für **A** und **B** kommen damit maximal folgende D-H-Parameter in Frage:

für **A**: (v_l, h, l, α) , $(d_{3S1}, h_{3S1}, 0, \alpha_{3S1})$, $(d_{3S2}, 0, 0, \alpha_{3S2})$, $(d_{3S3}, 0, 0, 0)$

für **B**: $\mathbf{W}$, $(v_l, 0, 0, 0)^{-1}$, $(0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})^{-1}$

Diese Überlegungen spielen später bei den Gradabschätzungen des Lösungspolynoms eine entscheidende Rolle.

Der Ansatz $\mathbf{R}_1 \bullet \mathbf{R}_2 \bullet \mathbf{A} = \mathbf{B}$ liefert folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1.4:\ & \sin(d_1)\cdot\{\sin(\alpha_1)\cdot(A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2)+h_2) \\
& \qquad -\cos(\alpha_1)\cdot\{\sin(d_2)\cdot(A_{14}+l_2)+\cos(d_2)\cdot(A_{24}\cdot\cos(\alpha_2)-A_{34}\cdot\sin(\alpha_2))\}\} \\
& +\cos(d_1)\cdot\{l_1+\cos(d_2)\cdot(A_{14}+l_2)-\sin(d_2)\cdot(A_{24}\cdot\cos(d_2)-A_{34}\cdot\sin(\alpha_2))\} \ = \ B_{14}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.4:\ & -\cos(d_1)\cdot\{\sin(\alpha_1)\cdot(A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2)+h_2) \\
& \qquad -\cos(\alpha_1)\cdot\{\sin(d_2)\cdot(A_{14}+l_2)+\cos(d_2)\cdot(A_{24}\cdot\cos(\alpha_2)-A_{34}\cdot\sin(\alpha_2))\}\} \\
& +\sin(d_1)\cdot\{l_1+\cos(d_2)\cdot(A_{14}+l_2)-\sin(d_2)\cdot(A_{24}\cdot\cos(d_2)-A_{34}\cdot\sin(\alpha_2))\} \ = \ B_{24}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.4:\ & \sin(\alpha_1)\cdot\{\sin(d_2)\cdot(A_{14}+l_2)+\cos(d_2)\cdot(A_{24}\cdot\cos(\alpha_2)-A_{34}\cdot\sin(\alpha_2))\} \\
& +\cos(\alpha_1)\cdot(A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2)+h_2) \ = \ B_{34}-h_1
\end{aligned}
$$

Abstandsgleichung:

$$
\begin{aligned}
& l_1^2+h_2^2+(A_{14}+l_2)^2+A_{24}^2+A_{34}^2+2\cdot h_2\cdot(A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2)) \\
& +2\cdot l_1\cdot\{\cos(d_2)\cdot(A_{14}+l_2)-\sin(d_2)\cdot(A_{24}\cdot\cos(\alpha_2)-A_{34}\cdot\sin(\alpha_2))\} \\
& = \ B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2
\end{aligned}
$$

In Anlehnung an die Terminologie in [Pieper 69] werden folgende Abkürzungen definiert:

$F_1 = A_{14}+l_2$

$F_2 = A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2)$

$F_3 = l_1^2+h_2^2+(A_{14}+l_2)^2+A_{24}^2+A_{34}^2+2\cdot h_2\cdot(A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2))$

$F_4 = \cos(\alpha_1)\cdot(A_{24}\cdot\sin(\alpha_2)+A_{34}\cdot\cos(\alpha_2)+h_2)$

3.4: $\sin(\alpha_1)\cdot\{\sin(d_2)\cdot F_1+\cos(d_2)\cdot F_2\} + F_4 \ = \ B_{34}-h_1$

Abstandsgleichung: $F_3 + 2\cdot l_1\cdot\{\cos(d_2)\cdot F_1-\sin(d_2)\cdot F_2\} \ = \ B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2$

In der z-Positionswertgleichung 3.4 und der Abstandsgleichung treten nur die Variable d_2 und eine weitere, in den Elementen A_{ij} oder B_{ij} enthaltene Variable v_l auf. Aus diesen beiden Gleichungen wird nun die Variable d_2 eliminiert und ein Lösungspolynom vierten Grades für die Variable v_l erzeugt. Dazu muß die Variable d_2 auf einer Gleichungsseite isoliert werden; durch Quadrieren und Addieren der beiden umgeformten Gleichungen verschwindet die Variable d_2 und es bleibt das Lösungspolynom

$F_1^2 + F_2^2 \ = \ \{(B_{34}-h_1-F_4)/\sin(\alpha_1)\}^2 + \{(B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2-F_3)/(2\cdot l_1)\}^2$

in der Variablen v_l .

$l_1 \neq 0$ und $\sin(\alpha_1) \neq 0$ kann vorausgesetzt werden, da andernfalls die Roboterkonstruktion sogar auf eine quadratische Lösungsgleichung führen würde (vgl. Abschnitt 2.3.8, Nr. 9 und Nr. 12).

Da es sich bei der Variablen v_l um eine Rotationsvariable handelt, die entsprechend der Tangenssubstitution $x=\tan(v_l/2)$ (vgl. Abschnitt 2.2.3) vom Grad 2 ist, und da diese Variable v_l nur in den Elementen A_{ij} oder B_{ij} enthalten ist, sind für die Gradbestimmung

des Lösungspolynoms nur die Terme von Interesse, deren Grad in A_{ij} bzw. $B_{ij} > 2$ ist. Das ist nur für den letzten Term $\{(B_{14}{}^2+B_{24}{}^2+(B_{34}-h_1)^2-F_3)/(2\cdot l_1)\}^2$ des Polynoms der Fall. Zum Beweis, daß der Grad dieses Polynoms ≤ 4 ist, bleibt deshalb noch zu zeigen:
$(A_{14}+l_2)^2+A_{24}{}^2+A_{34}{}^2$ und $B_{14}{}^2+B_{24}{}^2+(B_{34}-h_1)^2$ sind Terme in $x=\tan(v_l/2)$ mit Grad ≤ 2, wobei die Konstanten l_2 und h_1 den Grad nicht beeinflussen und deshalb nicht weiter mitgeführt werden

Aufgrund der Überlegungen zur Struktur von **A** und **B** am Anfang dieses Abschnitts gilt für $A_{14}{}^2+A_{24}{}^2+A_{34}{}^2$ bzw. $B_{14}{}^2+B_{24}{}^2+B_{34}{}^2$ immer:

$$A_{14}{}^2+A_{24}{}^2+A_{34}{}^2 = h_{3S1}{}^2+l^2+h^2 + 2\cdot h_{3S1}\cdot h\cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&B_{14}{}^2+B_{24}{}^2+B_{34}{}^2 = \\
&\quad W_{14}{}^2+W_{24}{}^2+W_{34}{}^2+h_{3S3}{}^2+l_{3S3}{}^2 \\
&\quad - 2\cdot\{W_{14}\cdot W_{13}+W_{24}\cdot W_{23}+W_{34}\cdot W_{33}\}\cdot\{\cos(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\} \\
&\quad - 2\cdot\{W_{14}\cdot W_{12}+W_{24}\cdot W_{22}+W_{34}\cdot W_{32}\}\cdot\{\cos(v_l)\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}-\sin(v_l)\cdot l_{3S3}\} \\
&\quad - 2\cdot\{W_{14}\cdot W_{11}+W_{24}\cdot W_{21}+W_{34}\cdot W_{31}\}\cdot\{\cos(v_l)\cdot l_{3S3}+\sin(v_l)\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}
\end{aligned}$$

Damit führt das obige Lösungspolynom maximal zu Grad vier bzgl. der Variablen $x=\tan(v_l/2)$.

Wir haben an dieser Stelle gezeigt, daß eine geschlossene Lösung im Prinzip möglich ist, wollen aber aufgrund der geringen praktischen Bedeutung dieser Lösungsformen diesen Weg nicht weiter verfolgen.

Roboter mit fünf Rotations- und einer Translationsachse:

In diesem Fall können alle Konstruktionsvarianten durch Invertierung einzelner Randmatrizen bzw. der gesamten kinematischen Gleichung auf drei Ansätze zurückgeführt werden. Diese Überlegung wird durch folgende Aussage unterstützt:
Wird die kinematische Kette der drei sich schneidenden Rotationsgelenke von einem Translationsgelenk unterbrochen (ein Dreifach-Schnittpunkt 3S existiert nur, wenn die Translationsachse parallel zur Achse des ersten oder dritten Rotationsgelenk ist), dann kann die Reihenfolge der D-H-Parameter immer so umgeformt werden, daß die Beschreibung des Translationsüberganges vor oder hinter die Beschreibung der drei sich schneidenden Rotationsgelenke gezogen wird ([Heiß 85]) und eine kompakte Darstellung **3S** = ($\mathbf{R}_{3S1}$, $\mathbf{R}_{3S2}$, $\mathbf{R}_{3S3}$) der drei Rotationsgelenke entsteht.

Die drei Ansätze für die kinematische Gleichung haben folgendes Aussehen:

α) $\mathbf{R}_1\bullet\mathbf{R}_2\bullet\mathbf{A} = \mathbf{B}$
mit $\mathbf{B}=(0, t, l, \alpha)^{-1}\bullet\mathbf{W}$ oder $\mathbf{B}=\mathbf{W}$ oder $\mathbf{B}=\mathbf{W}\bullet(0, t, 0, 0)^{-1}\bullet(0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})^{-1}$
und $\mathbf{A}=(\vartheta, t, l, \alpha), (d_{3S1}, h_{3S1}, 0, \alpha_{3S1}), (d_{3S2}, 0, 0, \alpha_{3S2}), (d_{3S3}, 0, 0, 0)$

β) $\mathbf{R}_1\bullet\mathbf{T}\bullet\mathbf{R}_2\bullet\mathbf{3S} = \mathbf{W}$

γ) $\mathbf{R}_1\bullet\mathbf{A}\bullet\mathbf{3S} = \mathbf{B}\bullet\mathbf{W}\bullet\mathbf{R}_2{}^{-1}\bullet\mathbf{Konst}^{-1}$
mit $\mathbf{A} = (\vartheta, t, l, \alpha)$ und **B** = neutrales Element

oder **A** = neutrales Element und **B** = $(0, t, l, \alpha)^{-1}$
und **Konst** = $(0, h_{3S3}, l_{3S3}, \alpha_{3S3})$

zu α) Da **A** und **B** nur die Translationsvariable t enthalten, liefert $(A_{14}+l_2)^2+A_{24}^2+A_{34}^2$ und $B_{14}^2+B_{24}^2+(B_{34}-h_1)^2$ maximal den Grad zwei in v_l=t und damit kann diese Variante wie im Fall ohne Translationsgelenk behandelt werden.

zu β) Die Roboterklasse hat folgende Struktur
$(d_1,h_1,l_1,\alpha_1)\bullet(\vartheta,t,l_T,\alpha_T)\bullet(d_2,h_2,l_2,\alpha_2)\bullet(d_3,h_3,0,\alpha_3)\bullet(d_4,0,0,\alpha_4)\bullet(d_5,h_5,l_5,\alpha_5)$,

die zu folgendem Ansatz führt:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}_1,d_1)\bullet\mathbf{T}(\mathbf{x}_1,l_1)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{x}_1,\alpha_1)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{z},\vartheta)\bullet\mathbf{T}(\mathbf{z},t)\bullet\mathbf{T}(\mathbf{x},l_T)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha_T)\bullet\mathbf{D}_{2,3}\bullet\mathbf{D}_{3,4}\bullet\mathbf{D}_{4,5}\bullet\mathbf{D}_{5,6} = \{=\mathbf{T}(\mathbf{z}_1,h_1)^{-1}\bullet\mathbf{Ziel}\bullet\mathbf{R}(\mathbf{x}_5,\alpha_5)^{-1}\bullet\mathbf{T}(\mathbf{x}_5,l_5)^{-1}\bullet\mathbf{T}(\mathbf{z}_5,h_5)^{-1}\} = \mathbf{W}$$

Daraus folgt:

$$\text{3.4:}\quad \begin{aligned}&\cos(\alpha_1)\cdot\{t+\sin(\alpha_T)\cdot(\sin(d_2)\cdot l_2-\cos(d_2)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3)+\cos(\alpha_T)\cdot(h_2+\cos(\alpha_2)\cdot h_3)\}\\ &-\sin(\alpha_1)\cdot\{\cos(\vartheta)\cdot\{\sin(\alpha_T)\cdot(h_2+\cos(\alpha_2)\cdot h_3)-\cos(\alpha_T)\cdot(\sin(d_2)\cdot l_2-\cos(d_2)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3)\}\\ &\qquad -\sin(\vartheta)\cdot\{\sin(d_2)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3+\cos(d_2)\cdot l_2+l_T\}\}\\ &= W_{34}\end{aligned}$$

Abstandsgleichung:

$$\begin{aligned}&l_1^2+l_T^2+h_2^2+l_2^2+h_3^2\\ &+2\cdot\{h_2\cdot h_3\cdot\cos(\alpha_2)+l_1\cdot\sin(\vartheta)\cdot\sin(\alpha_T)\cdot(h_2+\cos(\alpha_2)\cdot h_3)+l_1\cdot\cos(\vartheta)\cdot l_T\}\\ &+t^2\\ &+2\cdot t\cdot\{(\sin(d_2)\cdot l_2-\cos(d_2)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3)\cdot\sin(\alpha_T)+\cos(\alpha_T)\cdot(h_2+\cos(\alpha_2)\cdot h_3)\}\\ &+2\cdot\sin(d_2)\cdot\{l_T\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3-l_1\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\alpha_T)\cdot l_2+l_1\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3\}\\ &+2\cdot\cos(d_2)\cdot\{l_T\cdot l_2+l_1\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\alpha_T)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_3+l_1\cdot\cos(\vartheta)\cdot l_2\}\\ &= W_{14}^2+W_{24}^2+W_{34}^2\end{aligned}$$

Wegen $\cos(\alpha_1)\neq 0$ (sonst führt die Konstruktion auf eine quadratische Bestimmungsgleichung, vgl. Abschnitt 2.3.8 Nr. 8) kann die Gleichung 3.4 so umgeformt werden, daß t durch einen Term in $x=\tan(d_2/2)$ mit Grad ≤ 2 darstellbar ist: $t=f(\tan(d_2/2))$. Wird der Term $f(\tan(d_2/2))$ nun in die Abstandsgleichung statt t eingesetzt, dann erhalten wir ein Polynom vierten Grades in $x=\tan(d_2/2)$.

zu γ) Hier läuft die Beweisführung analog zu β). Die Roboterklasse erlaubt die Strukturen

$(d_1,h_1,l_1,\alpha_1)\bullet(\vartheta,t,l,\alpha)\bullet(d_{3S1},h_{3S1},0,\alpha_{3S1})\bullet(d_{3S2},0,0,\alpha_{3S2})\bullet(d_{3S3},h_{3S3},l_{3S3},\alpha_{3S3})\bullet(d_2,h_2,l_2,\alpha_2)$ bzw.

$(\vartheta,t,l,\alpha)\bullet(d_1,h_1,l_1,\alpha_1)\bullet(d_{3S1},h_{3S1},0,\alpha_{3S1})\bullet(d_{3S2},0,0,\alpha_{3S2})\bullet(d_{3S3},h_{3S3},l_{3S3},\alpha_{3S3})\bullet(d_2,h_2,l_2,\alpha_2)$,

die zu folgenden Ansätzen führen:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}_1,d_1)\bullet\mathbf{T}(\mathbf{x}_1,l_1)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{x}_1,\alpha_1)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{z},\vartheta)\bullet\mathbf{T}(\mathbf{z},t)\bullet\mathbf{T}(\mathbf{x},l)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha)\bullet\mathbf{D}_{3S1,3S2}\bullet\mathbf{D}_{3S2,3S3}\bullet$$
$$\mathbf{R}(\mathbf{z}_{3S3},d_{3S3}) = \mathbf{W}\bullet(d_2,0,0,0)^{-1}\bullet(0,h_{3S3},l_{3S3},\alpha_{3S3})^{-1}$$

bzw.

$$\mathbf{D}_{1,2}\bullet\mathbf{D}_{3S1,3S2}\bullet\mathbf{D}_{3S2,3S3}\bullet\mathbf{R}(\mathbf{z}_{3S3},d_{3S3}) =$$
$$(0,t,l,\alpha)^{-1}\bullet\mathbf{W}\bullet(d_2,0,0,0)^{-1}\bullet(0,h_{3S3},l_{3S3},\alpha_{3S3})^{-1}$$

Konstante D-H-Parameter sind – soweit möglich – schon in die Zielstellung **W** integriert. Damit ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

3.4: $\sin(\alpha_1)\cdot\{\sin(\vartheta)\cdot l-\cos(\vartheta)\cdot\sin(\alpha)\cdot h_{3S1}\} + \cos(\alpha_1)\cdot\{t+\cos(\alpha)\cdot h_{3S1}\} =$
$= \sin(d_2)\cdot\{W_{32}\cdot l_{3S3}-W_{31}\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\} - \cos(d_2)\cdot\{W_{31}\cdot l_{3S3}+W_{32}\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}$
$- W_{33}\cdot\cos(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3} + W_{34}$

bzw. mit der Abkürzung $\mathbf{C} = (0,t,l,\alpha)^{-1}\bullet\mathbf{W}$ für die zweite Struktur

3.4: $h_1 + \cos(\alpha_1)\cdot h_{3S1} =$
$= \sin(d_2)\cdot\{C_{32}\cdot l_{3S3}-C_{31}\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\} - \cos(d_2)\cdot\{C_{31}\cdot l_{3S3}+C_{32}\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}$
$- C_{33}\cdot\cos(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3} + C_{34}$

Die Variable t tritt bei **C** nur in
$C_{24}=\cos(\alpha)\cdot W_{24} + \sin(\alpha)\cdot\{W_{34}-t\}$ und $C_{34}=\cos(\alpha)\cdot\{W_{34}-t\} - \sin(\alpha)\cdot W_{24}$
auf; damit sind beide Gleichungen 3.4 linear in t und mit $\cos(\alpha_1)\neq 0$ bzw. $\cos(\alpha)\neq 0$ ist $t=f(\tan(d_2/2)$ mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ immer möglich.

Abstandsgleichung:
$l_1^2 + t^2 + l^2 + h_{3S1}^2 + 2\cdot\cos(\alpha_1)\cdot h_{3S1}\cdot t + 2\cdot l_1\cdot\{\cos(\vartheta)\cdot l+\sin(\vartheta)\cdot\sin(\alpha)\cdot h_{3S1}\} =$
$= W_{14}^2+W_{24}^2+W_{34}^2+h_{3S3}^2+l_{3S3}^2$
$- 2\cdot\{W_{11}\cdot W_{14}+W_{21}\cdot W_{24}+W_{31}\cdot W_{34}\}\cdot\{\cos(d_2)\cdot l_{3S3}+\sin(d_2)\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}$
$- 2\cdot\{W_{12}\cdot W_{14}+W_{22}\cdot W_{24}+W_{32}\cdot W_{34}\}\cdot\{\cos(d_2)\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}-\sin(d_2)\cdot l_{3S3}\}$
$- 2\cdot\{W_{13}\cdot W_{14}+W_{23}\cdot W_{24}+W_{33}\cdot W_{34}\}\cdot\cos(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}$

bzw.

$h_1^2 + l_1^2 + h_{3S1}^2 + 2\cdot\cos(\alpha_1)\cdot h_1\cdot h_{3S1} =$
$= C_{14}^2+C_{24}^2+C_{34}^2+h_{3S3}^2+l_{3S3}^2$
$- 2\cdot\{C_{11}\cdot C_{14}+C_{21}\cdot C_{24}+C_{31}\cdot C_{34}\}\cdot\{\cos(d_2)\cdot l_{3S3}+\sin(d_2)\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}$
$- 2\cdot\{C_{12}\cdot C_{14}+C_{22}\cdot C_{24}+C_{32}\cdot C_{34}\}\cdot\{\cos(d_2)\cdot\sin(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}-\sin(d_2)\cdot l_{3S3}\}$
$- 2\cdot\{C_{13}\cdot C_{14}+C_{23}\cdot C_{24}+C_{33}\cdot C_{34}\}\cdot\cos(\alpha_{3S3})\cdot h_{3S3}\}$

Auch hier führt das Einsetzen von $t=f(\tan(d_2/2))$ zu einem Lösungspolynom für $\tan(d_2/2)$ vom Grad ≤ 4 .

2.4.2 Roboterkonstruktionen mit 2 Zylindergelenken

Als Zylindergelenke C werden die Gelenkeinheiten eines Roboters bezeichnet, bei denen Rotationsachse und Translationsachse identisch sind; die D-H-Parameter für diese Gelenke mit dem Freiheitsgrad zwei lauten (d, t, l, α) und die zu den beiden Variablen d und t gehörende Transformationsmatrix wird mit **ZC** bezeichnet. **ZR** kennzeichnet die aus (d, h) entstandene Transformationsmatrix eines Rotationsgelenks und $\mathbf{X}_i$ ist die bisher schon bekannte Transformationsmatrix für die Translation und die Rotation bzgl. der x_i-Achse. Das von Yang vorgestellte Verfahren [Yang 69] basiert auf der Verwendung dualer 3×3-Matrizen und stützt sich auf folgenden Ansatz:

$\mathbf{ZC}_1 \bullet \mathbf{X}_2 \bullet \ldots \bullet \mathbf{X}_n \bullet \mathbf{ZC}_n = \ldots$

Aus der Orientierungsbetrachtung (Abschnitt 2.3.2) ist bekannt:
Im Primärteil und im Sekundärteil von 3.3 des obigen Matrixprodukts verschwinden d_1 und d_n, t_1 und t_n treten im Primärteil (=Orientierung) nicht auf. Daß eine Translationsbewegung des Zylindergelenks C_n die Stellung der z-Geraden des Zielsystems nicht verändert und daher t_n nicht im Sekundärteil der dritten Spalte auftritt, wird einsichtig, wenn man sich vor Augen führt, daß die z-Achse des Zielsystems und des Gelenksystems der Variablen t_n identisch sind.

Jetzt zeigt sich ein weiterer Vorteil des zur Positionsbeschreibung von Geraden verwendeten Momentenvektors gegenüber dem Lotvektor. Denn während die Variable t_1 in allen Komponenten des Lotvektors enthalten ist, ist der z-Wert der Momentenvektoren invariant gegen eine Bewegung t_1 entlang der z-Achse des Bezugsystems. Dies wird deutlich bei der Betrachtung der dualen 3×3-Matrix $\mathbf{ZC}_1$.

$$\mathbf{ZC}_1 = \begin{bmatrix} \cos(d_1)-\varepsilon\cdot t_1\cdot\sin(d_1) & -\sin(d_1)-\varepsilon\cdot t_1\cdot\cos(d_1) & 0 \\ \sin(d_1)+\varepsilon\cdot t_1\cdot\cos(d_1) & \cos(d_1)-\varepsilon\cdot t_1\cdot\sin(d_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese Invarianz der z-Komponente des Momentenvektors gegen eine Verschiebung der Geraden in z-Richtung kann auch direkt bewiesen werden:

$\mathbf{m} = \mathbf{l}\times\mathbf{o} = \mathbf{a}\times\mathbf{o}$ (vgl Abschnitt 1.1.3)
Bei einer in z-Richtung verschobenen Geraden gilt:
$m_{neu} = (a_x\ ,\ a_y\ ,\ a_z+z)^T\times o$ und $m_z = m_{zneu} = a_x\cdot o_y - a_y\cdot o_x \neq f(z)$

Damit ist im Element 3.3 des obigen Ansatzes keine der vier Variablen d_1 , t_1 , d_n und t_n enthalten und dies führt wegen der beiden restlichen Gelenkvariablen d_i und d_j zu einer dualen Gleichung in zwei Unbekannten. Durch Aufspalten der dualen Gleichung in ihre Primär- und Sekundärgleichung und durch geeignetes Umformen, Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen wird versucht, eine Variable zu eliminieren und ein Lösungspolynom 4. Grades für die verbleibende Variable aufzustellen.

Um nachzuweisen, daß dies gelingt, werden alle in Frage kommenden Roboterkonstruktionen mit 2 Zylindergelenken und 2 Rotationsgelenken betrachtet und in folgenden vier Äquivalenzklassen zusammengefaßt:

I) $(d_1, t_1, l_1, \alpha_1)\ (d_2, h_2, l_2, \alpha_2)\ (d_3, t_3, l_3, \alpha_3)\ (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$

II) $(d_1, t_1, l_1, \alpha_1)\ (d_2, h_2, l_2, \alpha_2)\ (d_3, h_3, l_3, \alpha_3)\ (d_4, t_4, l_4, \alpha_4)$

IIIa) $(d_1, t_1, l_1, \alpha_1)\ (d_2, t_2, l_2, \alpha_2)\ (d_3, h_3, l_3, \alpha_3)\ (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$

IIIb) $(d_1, t_1, l_1, \alpha_1)\ (d_2, t_2, l_2, \alpha_2)\ (d_3, h_3, l_3, \alpha_3)\ (d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$

Durch Invertierung der kinematischen Gleichung ergeben sich die für das Yang-Verfahren notwendigen Ansätze:

I) $\mathbf{ZC_1 \bullet X_2 \bullet ZR_2 \bullet X_3 \bullet ZC_3 = W \bullet (X_4 \bullet ZR_4)^{-1}}$

II) $\mathbf{ZC_1 \bullet X_2 \bullet ZR_2 \bullet X_3 \bullet ZR_3 \bullet X_4 \bullet ZC_4 = W}$

IIIa) $\mathbf{ZC_1 \bullet X_2 \bullet ZC_2 = W \bullet (X_3 \bullet ZR_3 \bullet X_4 \bullet ZR_4)^{-1}}$

IIIb) $\mathbf{ZC_2 \bullet X_3 \bullet ZC_3 = (ZR_1 \bullet X_2)^{-1} \bullet W \bullet (X_4 \bullet ZR_4)^{-1}}$

Im Fall I führt folgendes Vorgehen zum Ziel:

$$\begin{aligned}
3.3:\ & -\cos(d_2)\cdot\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)\cdot\cos(\alpha_2) \\
& + \varepsilon\cdot\{-\cos(d_2)\cdot\{\sin(\alpha_1)\cdot\cos(\alpha_2)\cdot l_2+\cos(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot l_1\} \\
& \qquad + \sin(d_2)\cdot\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_2 - l_1\cdot\sin(\alpha_1)\cdot\cos(\alpha_2) - l_2\cdot\cos(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\} = \\
& = \sin(\alpha_3)\cdot\{\sin(d_4)\cdot Wp_{31}+\cos(d_4)\cdot Wp_{32}\} + \cos(\alpha_3)\cdot Wp_{33} \\
& + \varepsilon\cdot\{l_3\cdot\cos(\alpha_3)\cdot\{\sin(d_4)\cdot Wp_{31}+\cos(d_4)\cdot Wp_{32}\} \\
& \qquad + \sin(\alpha_3)\cdot\{\sin(d_4)\cdot Ws_{31}+\cos(d_4)\cdot Ws_{32}\} - l_3\cdot\sin(\alpha_3)\cdot Wp_{33}+\cos(\alpha_3)\cdot Ws_{33}\}
\end{aligned}$$

Aus der Primärgleichung wird abgeleitet: $\cos(d_2)=f(d_4)/\{-\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\}$
Mit Abschnitt 2.3.8 Nr. 2 kann $\sin(\alpha_1)\neq 0$ und $\sin(\alpha_2)\neq 0$ vorausgesetzt werden.

Einsetzen von $\cos(d_2)=f(d_4)/\{-\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\}$ in die Sekundärgleichung und umformen zu $\sin(d_2)=F(d_4)/\{\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_2\}$ eröffnet die Möglichkeit, durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen die Variable d_2 zu eliminieren und das Lösungspolynom vierten Grades in $x=\tan(d_4/2)$

$$1 = \{f(d_4)^2\cdot h_2^2 + F(d_4)^2\}/\{\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\cdot h_2\}^2$$

zu erhalten.

Interessant ist es nun auch zu untersuchen, wie die im Yang-Verfahren verwendete duale Einzelgleichung 3.3 aus einem Ansatz mit homogenen 4×4-Matrizen hergeleitet werden kann. Der Primärteil der dualen Einzelgleichung 3.3 ist identisch mit der Einzelgleichung

3.3 des Ansatzes mit homogenen 4×4-Matrizen und die ebenfalls benötigte Sekundärgleichung 3.3 ergibt sich aus dem homogenen Ansatz durch

$H_{14} \cdot H_{23} - H_{24} \cdot H_{13}$ (vgl. Abschnitt 1.2.4)

Explizite Lösungsmethoden für II) und III) wurden in [Baumeister 86] untersucht; um geschlossenen Lösungsformeln zu ermöglichen, müssen diese Roboterklassen durch zusätzliche kinematische Vorgaben weiter eingeschränkt werden.

II) $(d_1, t_1, 0, 90°)(d_2, h_2 \neq 0, 0, 90°)(d_3, 0, l_3, \alpha_3)(d_4, t_4, l_4, \alpha_4)$

IIIa) $(d_1, t_1, 0, 90°)(d_2, t_2, 0, 90°)(d_3, h_3, l_3, 90°)(d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$

IIIb) $(d_1, h_1, 0, 90°)(d_2, t_2, 0, 90°)(d_3, t_3, l_3, 90°)(d_4, h_4, l_4, \alpha_4)$

Statt $\alpha_i=90°$ ist auch $\alpha_i=270°$ gestattet; dies entspricht der Wahl der entgegengesetzten Gelenkdreh- bzw. Gelenkschubrichtung im nachfolgenden Gelenk.

Eine weitere Roboterklasse, für die nach [Baumeister 86] und [Pieper 69] ein Lösungspolynom vom Grad vier hergeleitet werden kann, wird durch folgende D-H-Tupel beschrieben:
$(d_1, h_1, 0, 90°)(d_2, 0, l_2, -90°)(d_3, 0, 0, 90°)(d_4, 0, l_4, -90°)(d_5, 0, 0, 90°)(d_6, h_6, l_6, \alpha_6)$
diese Konstruktion entspricht dreimal zwei sich schneidenden Rotationsgelenken mit den Zusatzbedingungen $h_i=0$, $\alpha_j=90°+\pi$, $2 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 5$.

Aufgrund der geringen praktischen Relevanz der letzten vier vorgestellten Roboterklassen wird hier auf eine Herleitung der Lösungspolynome und die Darstellung der Gradberechnung verzichtet; eine detaillierte Behandlung dieser Klassen ist bei den oben zitierten Autoren zu finden.

2.4.3 Vergleich der Lösungen mit Grad zwei und Grad vier

Zwei wesentliche Aspekte sind beim Vergleich zwischen den in Kapitel 2.3 und 2.4 vorgestellten Lösungsverfahren zu betrachten. Dies sind einerseits die Komplexität und die Anwendbarkeit der gewonnenen Lösungsformel, andererseits die Mächtigkeit der Verfahren in der Praxis.

Obwohl für Polynome vom Grad vier explizite Lösungsformeln existieren, ist ihr Einsatz aufgrund der hohen Komplexität und der Gefahr numerischer Ungenauigkeiten sehr umstritten. Eine ernstzunehmende Alternative bietet hier die Anwendung numerischer Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle dieses Polynoms, um dann mit dem bekannten Gelenkwert die restlichen Gelenkvariablen quadratisch zu berechnen. Degenerations- oder Reduktionsstellungen können schon am Verschwinden der Variablen aus der Polynomgleichung erkannt werden, die Analyse einer unerreichbaren Zielstellung anhand des Polynoms vierten Grades erweist sich jedoch als sehr komplex und aus dem numerischen, linearisierten Verfahren läßt sich für unerreichbare Zielstellungen kein Kriterium ableiten. Der entscheidende Aspekt für den Einsatz numerischer Verfahren dürfte aber darin liegen, ob bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Konvergenz des Verfahrens für beliebig vorgegebene Zielstellungen garantiert und ob die willkürliche Auswahl *einer* Lösung (aus maximal vier möglichen Lösungen) für den jeweiligen Anwendungsfall toleriert werden kann. Dieser Fragenkomplex bietet noch ein weites Feld für zukünftige Untersuchungen, fraglich ist nur, ob der in Betracht kommende Einsatzbereich derartige Anstrengungen rechtfertigt. Dies führt uns zur Analyse der Bedeutung der jeweiligen Verfahren.

Alle bisher in größerem Umfang eingesetzten Industrieroboter weisen nur parallele oder orthogonale Gelenkübergänge auf. Diese Einschränkung garantiert zwar noch nicht die generelle Lösbarkeit der kinematischen Gleichung (vgl. VW-R30), doch führt dies zumindest für die überwiegende Mehrzahl aller Roboter zu geschlossenen Lösungen. Ein zweiter Grund für die Wahl orthogonaler Achsen liegt in dem Wunsch nach maximalen Arbeitsräumen. So existieren beispielsweise bei der orthogonalen Anordnung der drei Orientierungsgelenke keine unerreichbaren Orientierungsvorgaben, dagegen führen Abweichungen von dieser orthogonalen Ausrichtung der Gelenke stets zu Einbußen bei den erreichbaren Orientierungen eines Roboters (vgl. Abschnitt 2.3.2 und Satz 2.2.7 in [Heiß 85]).

Unter der Voraussetzung, daß $\alpha_i \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}$ für alle Gelenkübergänge eines Roboters gilt, wird die Menge der zusätzliche mit den in Abschnitt 2.4.1 und 2.4.2 beschriebenen Verfahren lösbaren kinematischen Gleichungen relativ klein.

Bei der im folgenden aufgeführten Liste der Roboterklassen, die auf nichtquadratisch lösbare kinematische Gleichungen führen, beschränken wir uns auf je einen Vertreter der durch Reihenfolgevertauschung zueinander paralleler Rotations- und Translationsgelenke und durch Invertierung der kinematischen Gleichung definierten Äquivalenzklassen.

Das in Abschnitt 2.4.1 vorgestellte Verfahren führt zu folgenden zusätzlichen Roboterklassen:

1) $(d_1,h_1,l_1,\pm 90°)\ (d_2,h_2,l_2,\pm 90°)\ (d_3,h_3,l_3,\pm 90°)\ (d_4,h_4,0,\alpha_4)\ (d_5,0,0,\alpha_5)\ (d_6,h_6,l_6,\alpha_6)$
   $l_1 \neq 0,\ l_2 \neq 0$

2) $(d_1,h_1,l_1,\pm 90°)\ (d_2,h_2,l_2,\pm 90°)\ (d_3,h_3,0,\alpha_3)\ (d_4,0,0,\alpha_4)\ (d_5,h_5,l_5,\alpha_5)\ (\delta_6,\eta_6,l_6,\alpha_6)$
   $l_1 \neq 0$

3) $(d_1,h_1,l_1,0°$ bzw. $180°)\ (\vartheta_2,t_2,l_2,\alpha_2)\ (d_3,h_3,0,\alpha_3)\ (d_4,0,0,\alpha_4)\ (d_5,h_5,l_5,\alpha_5)$
   (d_6,h_6,l_6,α_6)

Die für das Yang-Verfahren am besten geeignete Roboterklasse C , R , C , R

$(d_1,t_1,l_1,\pm 90°)\ (d_2,h_2,l_2,\pm 90°)\ (d_3,t_3,l_3,\pm 90°)\ (d_4,h_4,l_4,\alpha_4)$

(äquivalent zu R , C , R , C) aus Abschnitt 2.4.2 I muß, um nicht auf eine quadratisch lösbare kinematische Gleichung zu führen, folgende Eigenschaften aufweisen:
$\sin(\alpha_i) \neq 0 \wedge h_2 \neq 0 \wedge l_3 \neq 0,\ 1 \leq i \leq 3$.
Da durch die Gelenkvariable d_2 die beiden Translationsachsen von t_1 und t_3 zueinander

parallel eingestellt werden können, legt diese Konstruktion eine ausgeprägte Anfälligkeit für Degenerationlokale Degenerationen an den Tag.

Von den oben weiter eingeschränkten Klassen II, IIIa und IIIb wird Klasse II mit $\sin(\alpha_3)=0$ quadratisch lösbar (vgl. Abschnitt 2.3.8 Nr. 2), so daß alle in diesen drei Klassen aufgeführten Konstruktionen mit Lösungspolynom vom Grad vier maximal zwei frei wählbare Längenparameter h_i bzw. l_j besitzen, die nicht auf triviale Weise in die Zielvorgabe integrierbar sind, und somit allein von ihrem Umfang her kaum größere Bedeutung erlangen können.

Das sehr häufig ins Feld geführte Argument, Lösungspolynome vom Grad vier erhöhten aufgrund der größeren Lösungsvielfalt die Flexibilität eines Roboters [Roth 76], ist nicht stichhaltig. In der Regel führen diese Polynome nur für sehr wenige Zielstellungen zu *vier reellen* Lösungen oder aber es ergeben sich in der Folgeberechnung der restlichen Gelenkvariablen mehr eindeutige Lösungen als bei vergleichbaren Robotern mit quadratischen Bestimmungsgleichungen, so daß die Gesamtlösungsvielfalt nicht erhöht wird.