2.5 Berechnung der Gelenkgeschwindigkeit

Bevor in diesem Abschnitt auf die Möglichkeit eingegangen wird, wie neben der expliziten Lösung für die Gelenkvariablen auch Formeln für Berechnungder Gelenkgeschwindigkeiten und Gelenkbeschleunigungen gewonnen werden können, sollen zuerst die unterschiedlichen Formen von Zielvorgaben und die verschiedenen Arten von Bahnsteuerungen bei Robotern aus Benutzersicht betrachtet werden.

Wir unterscheiden bei der Zielvorgabe die kartesische Eingabe in Weltkoordinaten von der Eingabe in Gelenkkoordinaten. Die bisher vorgestellten Verfahren zur Vorwärts- und Rückwärtsrechnung bilden das Bindeglied zwischen diesen beiden Ebenen. Die Werte für die Gelenkkoordinaten stellen dann die Sollwertvorgabe für die unterlagerten Antriebsregelkreise dar, die dafür sorgen, daß die gewünschten Gelenkstellungen möglichst genau eingestellt werden.

Die Steuerungen von Robotern lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

1. Punkt-zu-Punkt-Steuerung
   Vorgegeben wird nur die Zielstellung des Effektors in Gelenkkoordinaten oder in kartesischen Koordinaten. Erfolgt die Beschreibung der Zielstellung in kartesischen Koordinaten, so müssen mit Hilfe der Rückwärtsrechung zuerst die Gelenkkoordinaten bestimmt werden. Auf welchem Weg der Effektor das Ziel erreicht bleibt undefiniert und wird damit von der Robotergeometrie und den unterlagerten Gelenkregelkreisen bestimmt. So können z. B. durch die Gelenkregelkreise alle Gelenke mit maximaler Geschwindigkeit bewegt werden, bis sie zu *verschiedenen* Zeiten ihre Endstellung erreicht haben. Die maximal zulässigen Gelenkgeschwindigkeiten hängen vom unterlagerten Regelkreis ab. Häufig wird ein rampenförmiges Geschwindigkeitsprofil beim Anfahren und Abbremsen definiert.

   Eine solche Bewegungsart ist für viele Anwendungen wie z.B. Punktschweißen oder einfache Montagevorgänge durchaus ausreichend.

2. Bahnsteuerung
   Hier wird neben der Zielstellung auch der (kartesische) Bahnverlauf vorgegeben. Da in diesem Fall die Bahn des betrachteten Objekts eine zwangläufige Bewegung darstellt, kann die Stellung des Objektsystems (Gangsystem) über einen Parameter, in der Regel die Zeit t, definiert werden. Dem Anwender stehen folgende Möglichkeiten zur Bahndefinition zur Verfügung:

   a) Stützpunktvorgabe, d.h. Stellung im Zeitpunkt t_i und die Angabe einer Interpolationsvorschrift, z.B.:

      - lineare Interpolation in Gelenkkoordinaten; die Stellung wird durch Vorgabe der Gelenkwerte definiert und die Differenz zwischen Sollvorgabe und aktuellen Gelenkwerten wird durch eine lineare Gelenkbewegung ausgeglichen, so daß alle Gelenkbewegungen *gleichzeitig* enden.

- lineare Interpolation in kartesischen Koordinaten, das heißt, daß zwischen zwei Stützpunkten eine geradlinige Bewegung durchgeführt wird.

- lineare Interpolation mit Überschleifen an den Eckpunkten, das heißt, daß beim Übergang von einem Geradenstück in das nächste eine abgerundete Bewegung erfolgt.

- Kreisinterpolation, daß heißt, daß zwischen drei vorgegebenen Stützpunkten eine kreisförmige Bewegung ausgeführt wird.

- Interpolation mit kubischen Splines, daß heißt, daß praktisch beliebige Kurvenformen stückweise approximiert werden können. Hierbei ist auch eine Vorgabe von Bahngeschwindigkeiten und -beschleunigungen möglich.

b) Angabe einer Bahnfunktion

- Angabe einer kartesischen Bahnfunktion B(t)=Ziel(t); B(t) ist dabei eine mehrdimensionale Zeitfunktion F: $t \rightarrow \Re^n$ in Form einer der mathematischen Strukturen, die sich zur Stellungsbeschreibung eignen.

- Vorgabe einer expliziten Zeitfunktion $v_i(t)$ für jedes Gelenk G_i:
  diese Variante wird üblicherweise vom Anwender nicht direkt benutzt, sondern resultiert aus der Rückwärtsrechnung, angewandt auf eine kartesisch vorgegebene Bahnfunktion B(t). Denn sobald eine explizite Lösung – z.B. $v_i=f_i(x,y,z,R1,R2,R3)$ oder $v_i=f_i(W_{11},...,W_{34})$ – für die Gelenkvariable v_i existiert, entsteht durch Einsetzen der mit t parametrisierten kartesischen Bahnfunktion – im Beispiel $(x(t),y(t),z(t),R1(t),R2(t),R3(t))$ oder $(W_{11}(t),...,W_{34}(t))$ – die Zeitfunktion $v_i(t)$ für das Gelenk G_i. Die Gelenkvariablen $v_i(t)$ werden in der Praxis nur für diskrete Zeitpunkte berechnet und als Sollwerte an die unterlagerten Regelkreise gegeben. Dieser *Interpolationstakt* ΔT liegt in der Größenordnung von wenigen Millisekunden.

Alle Interpolationsarten führen nach Auswertung der Interpolationsvorschrift ebenfalls auf (stückweise definierte) explizite Bahnfunktionen.
Nun kann natürlich zur Bahndefinition statt des Zeitparameters t auch ein anderer Parameter s verwendet werden. Dies stellt aber meistens nur einen Zwischenschritt dar, in dessen Folge dann eine geeignete Zeitfunktion s(t) für den Parameter s so bestimmt wird, daß z.B. ein vorgegebenes maximales Antriebsmoment beim Bahnfahren nicht überschritten wird [Pfeiffer 87]. Das Ergebnis ist dann wieder eine Bahn B(t) in Abhängigkeit vom Zeitparameter t.

Die Ansprüche an die oben angesprochenen Regelkreise sind sehr hoch. Das von ihnen bestimmte Bahnverhalten des Effektors soll einerseits möglichst hohe Bahngeschwindigkeiten zulassen, andererseits möglichst exakt, d.h. ohne Schleppfehler und ohne Überschwingen, den vorgegebenen Bahnverlauf einhalten. Dies ist insbesondere deshalb schwierig, weil sich die Parameter der Regelkreise in einem weiten Bereich nichtlinear ändern. So ändern sich etwa die Massenträgheitsmomente der einzelnen Roboterelemente bezüglich ihrer Drehachse je nach Stellung um mehrere hundert Prozent. Daneben ist mit starken Lastwechseln, d.h. Bewegungen mit und ohne Last zu rechnen.

Dies führt unter anderem dazu, daß sich die Regelung nicht allein auf eine Zustandsgröße, nämlich die Lage des Gelenks, beschränken kann. Gelegentlich werden neben der Lage auch der Motorstrom und die Gelenkgeschwindigkeit in die Regelung einbezogen. Die Regler werden heute noch häufig teilweise analog und teilweise digital ausgeführt. Es gibt aber auch bereits Konzepte für eine vollständig digitale Regelung [Cevik 87]. Auf die Vielzahl der in der Forschung verfolgten Ansätze in diesem Bereich soll in diesem Rahmen nicht eingegangen werden.

In jedem Fall ist neben der Gelenkstellung $v_i(t)$ die Gelenkgeschwindigkeit $\dot{v}_i(t)$ eine wesentliche Zustandsgröße, die ebenfalls als Sollwert vorgegeben werden kann.

Diese Sollgeschwindigkeit $\dot{v}_i(t)$ darf nicht verwechselt werden mit der in den meisten Reglern schon verwendeten Durchschnittsgeschwindigkeit $\frac{\{v_i(t)-v_i(t-\Delta T)\}}{\Delta T}$. Die Berücksichtigung der Sollgeschwindigkeit $\dot{v}_i(t)$ macht den Regelalgorithmus natürlich komplexer und verlangt bei gleicher Taktzeit leistungsfähigerer Hardware.

Unter der Voraussetzung, daß die kartesische Bahn durch explizite Vorgabe oder durch Interpolation als Zeitfunktion B(t) vorliegt und für die Gelenkvariablen explizite Lösungsformeln existieren, stellt die Berechnung der Gelenkgeschwindigkeit kein Problem dar. Mit der Zeitfunktion B(t) der Bahn ist auch die Bahngeschwindigkeit $\dot{B}(t)$ als Ableitung nach der Zeit bekannt. Aus den expliziten Lösungen für v_i werden durch Einsetzen von B(t) die Funktionen $v_i(t)$ bestimmt. Mit den bekannten Differentiationsregeln läßt sich eine Zeitfunktion für den Geschwindigkeitsverlauf der einzelnen Gelenkbewegungen ableiten. Wahlweise kann dieses Ziel über das Lösungspolynom mittels impliziter oder über die explizite Lösung für $v_i(t)$ mittels expliziter erreicht werden. Die implizite Differentiation setzt allerdings die Kenntnis der zum Zeitpunkt t benötigten Gelenkpositionen voraus, was keine Probleme aufwirft, wenn explizite Gleichungen für die $v_i(t)$ vorliegen.

Betrachten wir zuerst die Möglichkeit der impliziten Differentiation.

Sei F(t,v) das Lösungspolynom mit der Zeitvariablen t und der Gelenkvariablen v, und v=f(t) die explizite Lösungsformel, dann gilt:

$$\partial F(t,v)/\partial t + \partial F(t,v)/\partial v \cdot \dot{f}(t) = 0$$

und für $\partial F(t,v)/\partial v \neq 0$:

$$\dot{f}(t) = - (\partial F(t,v)/\partial t) / (\partial F(t,v)/\partial v)$$

Die bei der expliziten Differentiation benötigte Ableitung der Funktion ATAN2(x,y) ist identisch mit der Ableitung der zugrundeliegenden Funktion arctan(x/y):

∂ATAN2(x(t),y(t))/∂t = (y·x'-x·y')/(x^2+y^2)

Beispiel:

Am Beispiel des im vorigen Abschnitt betrachteten Roboters GdA06 soll die Herleitung der Formel für die Gelenkgeschwindigkeit demonstriert werden; die Zeitvariable t wird zur besseren Übersichtlichkeit weggelassen. Für die nach Variante I in Abschnitt 2.3.7 bestimmten Gelenkvariablen ergibt sich somit folgender Geschwindigkeitsverlauf:

$\dot{d}_1 = (W_{14}\cdot\dot{W}_{24}-W_{24}\cdot\dot{W}_1)/(W_{14}{}^2+W_{24}{}^2)$ {explizite Ableitung} oder

$\dot{d}_1 = -(\sin(d_1)\cdot\dot{W}_{14}-\cos(d_1)\cdot\dot{W}_{24})/(\cos(d_1)\cdot W_{14}+\sin(d_1)\cdot W_{24})$ {implizite Ableitung}

$\dot{d}_3 = -(W_{14}\cdot\dot{W}_{14}+W_{24}\cdot\dot{W}_{24}+W_{34}\cdot\dot{W}_{34})/(\pm h\cdot l\cdot\sqrt{1-\sin^2(d_3)}\,)$ {explizite Ableitung}

Das Vorzeichen im Nenner hängt von der aktuellen Position von d_3 ab; sinnvollerweise wird $\pm\sqrt{1-\sin^2(d_3)}$ durch $\cos(d_3)$ ersetzt, dies führt dann zur gleichen Form, die aus der impliziten Ableitung gewonnen werden könnte.

Für $\dot{d}_2$ ergibt sich nach einigen Umformungen und Auswertung einiger aus Abschnitt 2.3.7 bekannter Zusammenhänge folgende Lösung:

$$\dot{d}_2 = \{-(\dot{W}_{14}\cdot\cos(d_1)+\dot{W}_{24}\cdot\sin(d_1))\cdot W_{34} + \dot{W}_{34}\cdot(\cos(d_1)\cdot W_{14}+\sin(d_1)\cdot W_{24})$$
$$- \dot{d}_3\cdot(W_{14}{}^2+W_{24}{}^2+W_{34}{}^2+h^2-l^2)/2\} \ / \ (W_{14}{}^2+W_{24}{}^2+W_{34}{}^2)$$

Mit den bei der Berechnung der Variablen d_4 definierten Abkürzungen a und b gilt für $\dot{d}_4$:

$\dot{d}_4 = (a\cdot\dot{b}-b\cdot\dot{a})/(a^2+b^2)$ {explizite Ableitung}
$\dot{d}_4 = -(\sin(d_4)\cdot\dot{a}-\cos(d_4)\cdot\dot{b})/(a\cdot\cos(d_4)+b\cdot\sin(d_4))$ {implizite Ableitung}

Beide Formeln sind äquivalent, denn: $\sin(d_4)=b/\pm\sqrt{a^2+b^2}$ $\cos(d_4)=a/\pm\sqrt{a^2+b^2}$

Für die Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{d}_5$ und $\dot{d}_6$ gilt folgende allgemeine Aussage:

Bei Gelenkvariablen d, die aus 2 Gleichungen eindeutig berechnet werden konnten und deshalb in der Form "sin(d)=a , cos(d)=b , d=ATAN2(a,b)" vorliegen, führen explizite und implizite Ableitung zum gleichen Ergebnis: $\dot{d} = b\cdot\dot{a} - a\cdot\dot{b}$.
Denn wegen $a^2+b^2=\sin^2(d)+\cos^2(d)=1$ verschwindet in der expliziten Ableitung der Nenner.
Als Ansatz für die implizite Ableitung wird aus "d=ATAN2(a,b)" die Gleichung "0=b·sin(d)-a·cos(d)" entwickelt. Daraus ergibt sich nach den Regeln der impliziten Ableitung $\dot{d} = -(\sin(d)\cdot\dot{b}-\cos(d)\cdot\dot{a})/(b\cdot\cos(d)+a\cdot\sin(d))$ und dies führt wegen "sin(d)=a , cos(d)=b" ebenfalls zu $\dot{d} = b\cdot\dot{a} - a\cdot\dot{b}$.

Gerade die letzten Formeln haben sicher einen Eindruck davon vermittelt, welchen Vorteil einfache Lösungsgleichungen sowohl bei der Analyse der Ausnahmesituationen, als auch bei der Bestimmung der Gelenkgeschwindigkeiten bieten.

2.6 Inkrementelle Rückwärtsrechnung

Wie bereits erläutert, ist die kinematische Gleichung nicht für alle Roboter geschlossen lösbar, oder die z.B. aus einem Polynom vierten Grades gewonnenen Lösungsgleichungen sind so komplex, daß sie für explizite Berechnungen nicht brauchbar sind. In diesen Fällen müssen numerische Verfahren zur Bestimmung der Gelenkvariablen gefunden werden. Eine Möglichkeit, die Nullstellen des Lösungspolynoms mit Hilfe der üblichen numerischen Verfahren zu bestimmen, haben wir im Abschnitt 2.4.3 erwähnt. Von größerer praktischer Bedeutung ist jedoch das in diesem Kapitel behandelte Verfahren der inkrementellen Rückwärtsrechnung, das direkt an der kinematischen Grundgleichung ansetzt. Das Prinzip dieses Verfahrens liegt darin, die aus der Vorwärtsrechnung gewonnene transzendente Roboterfunktion $F(v_1, ..., v_n)$ zu linearisieren. Mit Hilfe dieser linearisierten Funktion kann, ausgehend von einer aktuellen Stellung der Robotergelenke, nährungsweise eine dicht benachbarte Stellung berechnet werden, die durch kleine Inkremente der Gelenkvariablen erreicht wird. Da dieser Zusammenhang zwischen Gelenkvariablen und Stellung linear ist, können auf einfache Weise aus den linearen Gleichungssystemen die Gelenkinkremente bestimmt werden. Diese Näherung ist natürlich nur für kleine Inkremente gültig. Deshalb müssen zur Berechnung weiter entfernter Stellungen genügend viele Interpolationsstellungen zwischen der aktuellen Stellung und der Zielstellung herangezogen werden.

Trotz dieser eng benachbarten Interpolationsstellung treten Linearisierungsfehler auf. Das bedeutet, daß mit den näherungsweise bestimmten Inkrementen der Gelenkvariablen nicht genau die nächste Interpolationsstellung erreicht wird. Um eine Fortpflanzung dieser zu vermeiden, muß daher die tatsächlich erreichte Interpolationsstellung mit Hilfe der nichtlinearisierten Roboterfunktion $F(v_1, ..., v_n)$ berechnet werden. Diese tatsächliche Stellung wird dann als Ausgangsstellung für die Bestimmung der nächsten Inkremente gewählt.

Im folgendenden betrachten wir zuerst die Linearisierung der Roboterfunktion und beschäftigen uns dann mit den Problemen, die bei der Lösung des linearen Gleichungs-systems auftreten.

2.6.1 Linearisierung der Roboterfunktion $F(v_1 , ... , v_n)$

Gegeben sei eine aktuelle Roboterstellung **A** mit den zugehörigen aktuellen Gelenkeinstel-lungen $\mathbf{v}^A$ und eine gewünschte Zielstellung **Z**; weiterhin ist die aus der jeweiligen Roboterkonstruktion resultierende Roboterfunktion bekannt:

$$F(v_1 ,\dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(\mathbf{Z}_i \bullet \mathbf{X}_{i+1}) \bullet \mathbf{Z}_n$$

Gelenkänderungen, die zum Einstellen der Zielvorgabe **Z** durchgeführt werden, lassen sich durch die Transformation **Zdiff**(dv_i) beschreiben und führen zu folgender Roboterfunktion, in der die $\mathbf{Z}_i$ die Variablenwerte $\mathbf{v}_i^A$ enthalten und $\mathbf{v}^{neu} = \mathbf{v}^A + \mathbf{dv}$ gilt:

$$F(v_1^{neu}, \ldots, v_n^{neu}) = \prod_{i=1}^{n-1} (\mathbf{Zdiff}(dv_i) \bullet \mathbf{Z}_i \bullet \mathbf{X}_{i+1}) \bullet \mathbf{Zdiff}(dv_n) \bullet \mathbf{Z}_n$$

Um nun zur inkrementellen Betrachtungsweise zu kommen, werden die Transformationen **Zdiff**(dv_i) additiv aufgespalten in das dem jeweils verwendeten Ring der homogenen 4×4-Matrizen, der dualen 3×3-Matrizen bzw. der dualen Quaternionen zugrundeliegende Einselement E ($\mathbf{I}^{4\times4}$, $\mathbf{I}^{3\times3}$ bzw. (1, 0, 0, 0)) und das Element Δ_i :

$$\mathbf{Zdiff}(dv_i) = \mathbf{E} + \Delta_i$$

Der sechsdimensionale Beschreibungsvektor kommt aufgrund der multiplikativen Verknüpfung von $\mathbf{Zdiff}(dv_i) \bullet \mathbf{Z}_i$ für diese Überlegungen nicht in Frage.

Δ_i ist *keine Stellungsbeschreibung* mehr, da es die in allen drei Darstellungsformen bestehenden Normiertheitsbedingungen verletzt. Δ_i hat, abhängig von der gewählten Darstellungsform, folgendes Aussehen, wobei dd_i bzw. dt_i die jeweilige Gelenkänderung dv_i beschreiben:

a) homogene 4×4-Matrix:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \cos(dd_i) - 1 & -\sin(dd_i) & 0 & 0 \\ \sin(dd_i) & \cos(dd_i) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dt_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) duale 3×3-Matrix:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \cos(dd_i) - \varepsilon \cdot dt_i \cdot \sin(dd_i) - 1 & -\sin(dd_i) - \varepsilon \cdot dt_i \cdot \cos(dd_i) & 0 \\ \sin(dd_i) + \varepsilon \cdot dt_i \cdot \cos(dd_i) & \cos(dd_i) - \varepsilon \cdot dt_i \cdot \sin(dd_i) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) duale Quaternion:
$\Delta_i = (\cos(dd_i/2) - \varepsilon \cdot dt_i/2 \cdot \sin(dd_i/2) - 1;\ 0;\ 0;\ \sin(dd_i/2) + \varepsilon \cdot dt_i/2 \cdot \cos(dd_i/2))$

wobei $dt_i = 0$, falls Gelenk i ein Rotationsgelenk,
und $dd_i = 0$, falls Gelenk i ein Translationsgelenk ist.

Durch Einsetzen von $\mathbf{E} + \Delta_i$ in die Roboterfunktion $F(v_1^{neu}, \ldots, v_n^{neu})$ und Ausmultiplizieren läßt sich F umformen zu

$$F(v_1^{neu},\ldots,v_n^{neu}) = \prod_{i=1}^{n-1}((\mathbf{E}+\Delta_i)\bullet\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1}) \bullet (\mathbf{E}+\Delta_n)\bullet\mathbf{Z}_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}((\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})+(\Delta_i\bullet\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})) \bullet \mathbf{Z}_n + \prod_{i=1}^{n-1}((\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})+(\Delta_i\bullet\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})) \bullet \Delta_n\bullet\mathbf{Z}_n$$

Für die exakte Beschreibung der inkrementellen Stellungsänderung von **A** nach **Z** gilt:

$$\mathbf{Z}\text{-}\mathbf{A} = F(v_1^{neu},\ldots,v_n^{neu}) - F(v_1^{A},\ldots,v_n^{A}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}((\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})+(\Delta_i\bullet\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})) \bullet (\mathbf{Z}_n+\Delta_n\bullet\mathbf{Z}_n) - \prod_{i=1}^{n-1}(\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1}) \bullet \mathbf{Z}_n$$

Wird dieser Ausdruck ausmultipliziert, so ergibt sich für die inkrementelle Stellungsänderung **Z-A** ein Summenterm $S = \sum_{j=1}^{2^n-1} S_j$, bei dem jeder Summand S_j ein Produkt mit mindestens einem Faktor Δ_i darstellt.

Machen wir jetzt davon Gebrauch, daß die Gelenkänderungen nur sehr klein sind, dann können wir folgende Näherungen benutzen:

1. $\sin(dd_i)\approx dd_i$ und $\cos(dd_i)\approx 1$ bzw. $\sin(dd_i/2)\approx dd_i/2$ und $\cos(dd_i/2)\approx 1$
   Damit verschwinden im Fall der Rotationsgelenke die transzendenten Funktionen in den Δ_i und es kann sowohl für Rotations- als auch für Translationsgelenke die Näherung

   $\Delta_i \approx \mathbf{D}\cdot dv_i$

   benutzt werden.

2. Produkte, die von höherer Ordnung klein sind, d.h. mehr als ein dv_i enthalten, werden vernachlässigt.

$$F(v_1^{neu},\ldots,v_n^{neu}) \approx \prod_{i=1}^{n-1}(\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1}) \bullet \mathbf{Z}_n + \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})\bullet\mathbf{D}\bullet\prod_{i=j}^{n-1}(\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})\bullet\mathbf{Z}_n\cdot dv_j$$

Hierbei gilt für eine

a) homogene 4×4-Matrix:

falls Rotationsgelenk

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

falls Translationsgelenk

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) duale 3×3-Matrix:

falls Rotationsgelenk

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

falls Translationsgelenk

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1\cdot\varepsilon & 0 \\ 1\cdot\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) duale Quaternion:

falls Rotationsgelenk

$\mathbf{D} = (0, 0, 0, 1/2)$

falls Translationsgelenk

$\mathbf{D} = (0, 0, 0, \varepsilon/2)$

In obiger Näherung gibt der Summenterm die Auswirkung der inkrementellen Gelenkbewegung dv_i auf die Stellung des Effektors wieder; die Abschätzungen ermöglichen es, die Auswirkung der inkrementellen Bewegungen dv_i der Robotergelenke durch ein lineares Gleichungssystem bezüglich der Gelenkinkremente dv_i zu beschreiben.

Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\mathbf{D}\bullet\mathbf{Z}_i = \partial\mathbf{Z}_i/\partial v_i$$

Wird eine m-wertige Funktion F nach all ihren n Variablen v_i abgeleitet und werden die Terme $\partial F/\partial v_i$ zu einer m×n-Matrix zusammengefaßt, so wird diese dem vollständigen Differential der Funktion F zugrundeliegende Matrix auch als *Jacobi-Matrix* **J**(F) bezeichnet.

Mit der Abkürzung

$$^{(i)}\dot{f}_{jk} = \frac{\partial f_{jk}}{\partial v_i}$$

hat die Jacobi-Matrix **J**(F) je nach Darstellungsart folgende Struktur:

a) homogene 4×4-Matrix

$$\mathbf{J}(F) = \begin{bmatrix} {}^{(1)}\dot{f}_{11} & {}^{(2)}\dot{f}_{11} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{11} \\ {}^{(1)}\dot{f}_{12} & {}^{(2)}\dot{f}_{12} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(1)}\dot{f}_{44} & {}^{(2)}\dot{f}_{44} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{44} \end{bmatrix}$$

b) duale 3×3-Matrix

$$\mathbf{J}(F) = \begin{bmatrix} {}^{(1)}\dot{f}_{11\text{primär}} & {}^{(2)}\dot{f}_{11\text{primär}} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{11\text{primär}} \\ {}^{(1)}\dot{f}_{12\text{primär}} & {}^{(2)}\dot{f}_{12\text{primär}} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{12\text{primär}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(1)}\dot{f}_{33\text{sekundär}} & {}^{(2)}\dot{f}_{33\text{sekundär}} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{33\text{sekundär}} \end{bmatrix}$$

c) duale Quaternion

$$\mathbf{J}(F) = \begin{bmatrix} {}^{(1)}\dot{f}_{1\text{primär}} & {}^{(2)}\dot{f}_{1\text{primär}} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{1\text{primär}} \\ {}^{(1)}\dot{f}_{2\text{primär}} & {}^{(2)}\dot{f}_{2\text{primär}} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{2\text{primär}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(1)}\dot{f}_{4\text{sekundär}} & {}^{(2)}\dot{f}_{4\text{sekundär}} & \dots & {}^{(n)}\dot{f}_{4\text{sekundär}} \end{bmatrix}$$

Damit läßt sich das lineare System zur Beschreibung der inkrementellen Bewegung darstellen als

$\mathbf{J}(F)\bullet\mathbf{dv}$,

denn die Matrixprodukte in den n Summanden entsprechen den partiellen Ableitungen von $F(v_1,...,v_n) = \mathbf{Z}_1\bullet\mathbf{X}_2\bullet...\bullet\mathbf{Z}_n$ nach v_i an der Stelle v^A.

Damit gilt:

$$F(v_1^{neu},\dots,v_n^{neu}) - F(v_1^A,\dots,v_n^A)+\mathbf{J}(F)|_{(v_1^A,\dots,v_n^A)}\bullet\mathbf{dv}$$

2.6.2 Bestimmung der Gelenkvariablen aus einem linearen Gleichungssystem

Zur Bestimmung der Gelenkinkremente **dv** wird ein lineares Gleichungssystem folgendermaßen hergeleitet:

Aus der aktuellen Stellung **A** und der Zielstellung **Z** wird die Differenz $\Delta\mathbf{Z} = \mathbf{Z} - \mathbf{A}$ gebildet; $\Delta\mathbf{Z}$ ist ebenso wie Δ_i *keine Stellungsbeschreibung.*

Da wir bei der Linearisierung der Roboterfunktion von den zu $\mathbf{Z}_1$ bzw. $\mathbf{Z}_n$ zugeordneten Bezugsystemen ausgegangen sind und die vollständige kinematische Gleichung

$$\prod_{i=0}^{n}(\mathbf{Z}_i \bullet \mathbf{X}_{i+1}) \bullet \mathbf{TR} = \mathbf{Ziel}$$

lauten kann (vgl. Abschnitt 2.2), muß die aktuelle Stellung **A** und die Zielvorgabe **Z** durch konstante Transformationen an die linearisierte Roboterfunktion angeglichen werden. Dieses modifizierte Inkrement wird in Analogie zur Rückwärtsrechnung in Abschnitt 2.2 mit $\Delta\mathbf{W}$ bezeichnet.

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{W} &= \mathbf{W}^{neu} - \mathbf{W} = (\mathbf{Z}_0 \bullet \mathbf{X}_1)^{-1} \bullet \mathbf{Z} \bullet (\mathbf{X}_{n+1} \bullet \mathbf{TR})^{-1} - (\mathbf{Z}_0 \bullet \mathbf{X}_1)^{-1} \bullet \mathbf{A} \bullet (\mathbf{X}_{n+1} \bullet \mathbf{TR})^{-1} = \\ &= (\mathbf{Z}_0 \bullet \mathbf{X}_1)^{-1} \bullet \Delta\mathbf{Z} \bullet (\mathbf{X}_{n+1} \bullet \mathbf{TR})^{-1}\end{aligned}$$

Dann läßt sich für den Vektor der Gelenkvariablen $\mathbf{v}^{neu}$ die kinematische Gleichung $F(v_1^{neu},...,v_n^{neu}) = \mathbf{W}^{neu}$ aufstellen und unter Verwendung der in 2.5.1 hergeleiteten Abschätzungen umformen zu

$$F(v_1^A,\ldots,v_n^A) + \mathbf{J}(F)|_{(v_1^A,\ldots,v_n^A)} \bullet \mathbf{dv} - \mathbf{W}^{neu} \; (=\mathbf{W} + {}^2\,\mathbf{W})$$

Da $F(v_1^A,\ldots,v_n^A)=\mathbf{W}$ gilt, steht mit $\mathbf{v}^{neu}=\mathbf{v}^A+\mathbf{dv}$ und $\mathbf{J}(F)|_{(v_1^A,\ldots,v_n^A)} \bullet \mathbf{dv} - {}^2\,\mathbf{W}$ ein lineares

Gleichungssystem zur näherungsweisen Berechnung von $\mathbf{v}^{neu}$, der zur Zielstellung $\mathbf{W}^{neu}$ bzw. **Z** gehörenden Gelenkeinstellung, zur Verfügung.
Da für n-achsige Roboter maximal sechs Gelenkvariablen aus der kinematischen Gleichung bestimmt werden können, die Jacobi-Matrix jedoch je nach Darstellungsform die Dimension 16×n (homogene 4×4-Matrix), 18×n (duale 3×3-Matrix) oder 8×n (duale Quaternion) aufweist, ist das vorliegenden lineare Gleichungssystem überbestimmt. Diese Überbestimmtheit resultiert aus den Abschätzungsfehlern, die die in der kinematischen Gleichung bestehenden Abhängigkeiten einzelner skalarer Gleichungen zerstören.

Sei **A** eine m×n-Matrix mit m > n, so kann für das überbestimmte Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ein optimaler Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ aus dem Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^T \bullet \mathbf{A} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \bullet \mathbf{b}$$

ermittelt werden. Optimal bedeutet hier, daß die euklidsche Norm des Residuumsvektors $\|\mathbf{b}-\mathbf{A}\bullet\hat{\mathbf{x}}\|$ minimal wird [Reinsch 74]. Dieses Gleichungssystem ist nicht mehr überbestimmt, da $\mathbf{A}^T\bullet\mathbf{A}$ ja gerade eine quadratische n×n-Matrix darstellt.

Offen bleibt im Zusammenhang mit der Multiplikation der transponierten Matrix allerdings die Frage, ob dies ein der Problematik adäquates Vorgehen darstellt, d.h. ob die eigentlich bestehenden Abhängigkeiten durch diese Transformation in das System eingebracht werden und dadurch z.B. eine Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ gefunden wird, bei der der Residuumsvektor $\mathbf{b}-\mathbf{A}\bullet\hat{\mathbf{x}}$ gleich Null wird, oder ob ein für den Problembereich ungeeignetes Werkzeug in rein formaler Weise eingesetzt wurde, das neben der Erhöhung des Rechenaufwandes u.U. sogar die Abschätzungsfehler vergrößert. Den Autoren ist nicht bekannt, daß dieses Verfahren im Zusammenhang mit der Rückwärtsrechnung näher untersucht oder in der Praxis eingesetzt worden wäre; dies ist vermutlich auf den hohen Rechenaufwand und die Existenz von einfacheren Vorgehensweisen zurückzuführen.

Ebenso könnten wir auf der Suche nach einem nicht überbestimmten Gleichungssystem auf den sechsdimensionalen Beschreibungsvektor zurückgreifen. Dazu muß, nachdem die Roboterfunktion auf gezeigte Weise berechnet wurde, diese in die sechsdimensionale Beschreibung umgerechnet und aus dieser durch Differentiation die Jacobi-Matrix mit der Dimension 6×6 (für einen sechsachsigen Roboter) gewonnen werden. Allerdings dürfte der zur Bestimmung dieses linearen Gleichungssystems notwendige Berechnungsaufwand in der Regel beträchtlich sein.

Die beiden zuletzt angesprochenen Aspekte wurden vor allem deshalb nicht weiter untersucht, weil durch das im folgenden geschilderte Vorgehen das Problem der Überbestimmtheit wesentlich eleganter umgangen werden kann [Paul 81c].

Dazu wird das lineare Gleichungssystem $\mathbf{J}(F)|_{(v_1^A,\ldots,v_n^A)} \bullet \mathbf{dv} = {}^{2}\ \mathbf{W}$

bzw. die äquivalenten Darstellungen

$$\sum_{i=1}^{n} \partial F/\partial v_i|_{(v_1^A,\ldots,v_n^A)} \cdot dv_i = {}^{2}\ \mathbf{W}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} (\mathbf{Z}_j \bullet \mathbf{X}_{j+1}) \bullet \partial \mathbf{Z}_i/\partial v_i \bullet \prod_{j=i+1}^{n} (\mathbf{X}_j \bullet \mathbf{Z}_j)\Big) \cdot dv_i = {}^{2}\ \mathbf{W}$$

von rechts oder von links mit der aktuellen Stellungsbeschreibung $\mathbf{W}^{-1} = F(v_1^A,\ldots,v_n^A)^{-1} = (\mathbf{Z}_1\bullet\mathbf{X}_2\bullet\ldots\bullet\mathbf{Z}_n)^{-1}$ multipliziert.

Mit $\mathbf{U}_i := \prod_{j=1}^{i-1} (\mathbf{Z}_j \bullet \mathbf{X}_{j+1})$ und $\mathbf{Q}_i := \prod_{j=i}^{n-1} (\mathbf{Z}_j \bullet \mathbf{X}_{j+1}) \bullet \mathbf{Z}_n$ erhalten wir die zwei Gleichungsversionen

$$\text{I)} \quad \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{U}_i \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{U}_i^{-1}) \cdot dv_i = {}^2\, \mathbf{W} \bullet \mathbf{W}^{-1}$$

$$\text{II)} \quad \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{Q}_i^{-1} \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{Q}_i) \cdot dv_i = \mathbf{W}^{-1} \bullet {}^2\, \mathbf{W} \quad \text{[Paul 81c]}$$

Ausmultiplizieren von $\mathbf{U}_i \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{U}_i^{-1}$ bzw. $\mathbf{Q}_i^{-1} \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{Q}_i$ liefert mit den Bezeichnungen ${}^i u_{lk}$ für $\mathbf{U}_i[l,k]$ bzw. ${}^i q_{lk}$ für $\mathbf{Q}_i[l,k]$ und bei dualen Quaternionen ${}^i u_j$ für $U_i[j]$ bzw. ${}^i q_j$ für $Q_i[j]$:

a) in homogenen 4×4-Matrizen:

falls Gelenk i ein Translationsgelenk ist

$$\mathbf{U}_i \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{U}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^i u_{13} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i u_{23} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i u_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_i^{-1} \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^i q_{31} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i q_{32} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i q_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

falls Gelenk i ein Rotationsgelenk ist

$$\mathbf{U}_i \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{U}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i u_{33} & {}^i u_{23} & X \\ {}^i u_{33} & 0 & -{}^i u_{13} & Y \\ -{}^i u_{23} & {}^i u_{13} & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei
$$X = {}^i u_{24} \cdot {}^i u_{33} - {}^i u_{34} \cdot {}^i u_{23}$$
$$Y = {}^i u_{34} \cdot {}^i u_{13} - {}^i u_{14} \cdot {}^i u_{33}$$
$$Z = {}^i u_{14} \cdot {}^i u_{23} - {}^i u_{24} \cdot {}^i u_{13}$$

$$\mathbf{Q}_i^{-1}\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^iq_{33} & {}^iq_{32} & X \\ {}^iq_{33} & 0 & -{}^iq_{31} & Y \\ -{}^iq_{32} & {}^iq_{31} & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei $X = {}^iq_{14}\cdot{}^iq_{21}-{}^iq_{24}\cdot{}^iq_{11}$
$Y = {}^iq_{14}\cdot{}^iq_{22}-{}^iq_{24}\cdot{}^iq_{12}$
$Z = {}^iq_{14}\cdot{}^iq_{23}-{}^iq_{24}\cdot{}^iq_{13}$

In der Variante I (Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{W}^{-1}$ von rechts) beschreibt $\mathbf{U}_i$ die Stellung des Gelenksystems S_i hinsichtlich des Bezugsystems BKS. Bezeichnet $\mathbf{p}_i$ den Vektor vom Ursprung des Systems BKS zum Ursprung des Systems S_i , dann gilt:
$(X, Y, Z)^T = (\mathbf{p}_i \times \mathbf{z}_i)$.
Diese Schreibweise ist aber identisch mit dem aus Abschnitt 1.1.3 bekannten Moment der Gerade $\mathbf{z}_i$. Damit wird auch klar, wie die entsprechende Darstellung als duale 3×3-Matrix aussieht: der Primärteil einer dualen 3×3-Matrix ist identisch mit der 3×3-Orientierungsmatrix der zugehörigen 4×4-Matrix. Der Sekundärteil der dualen Matrix enthält mit $({}^iu_{13},{}^iu_{23},{}^iu_{33})^T$ genau den Momentenvektor der Geraden $\mathbf{z}_i$.

b) in dualen 3×3-Matrizen:

$$\mathbf{U}_i\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{U}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^iu_{33} & {}^iu_{23} \\ {}^iu_{33} & 0 & -{}^iu_{13} \\ -{}^iu_{23} & {}^iu_{13} & 0 \end{bmatrix} \cdot f$$

$$\mathbf{Q}_i^{-1}\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^iq_{33} & {}^iq_{32} \\ {}^iq_{33} & 0 & -{}^iq_{31} \\ -{}^iq_{32} & {}^iq_{31} & 0 \end{bmatrix} \cdot f$$

wobei $f=\varepsilon$ falls Gelenk i ein Translationsgelenk und
$f=1$ falls Gelenk i ein Rotationsgelenk ist

c) in dualen Quaternionen:

$$\mathbf{U}_i\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{U}_i^{-1} = (0\ ,\ {}^iu_1\cdot{}^iu_3+{}^iu_2\cdot{}^iu_4\ ,\ {}^iu_3\cdot{}^iu_4-{}^iu_1\cdot{}^iu_2\ ,\ 1/2-{}^iu_2^2-{}^iu_3^2)\cdot f$$

$$\mathbf{Q}_i^{-1}\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{Q}_i = (0\ ,\ -{}^iq_1\cdot{}^iq_3+{}^iq_2\cdot{}^iq_4\ ,\ {}^iq_3\cdot{}^iq_4+{}^iq_1\cdot{}^iq_2\ ,\ 1/2-{}^iq_2^2-{}^iq_3^2)\cdot f$$

wobei $f=\varepsilon$ falls Gelenk i ein Translationsgelenk und
$f=1$ falls Gelenk i ein Rotationsgelenk ist

Die oben ermittelten Elemente von $\mathbf{U}_i \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{U}_i^{-1}$ bzw. $\mathbf{Q}_i^{-1} \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{Q}_i$ ergeben die einzelnen Spalten $k_{i\bullet}$ der Koeffizientenmatrix **K** des linearen Gleichungssystems **K•dv** = **b**. Dies wird im folgenden für einen Roboter mit sechs Rotationsgelenken unter Verwendung homogener 4×4-Matrizen für die Variante II ($\mathbf{Q}_i^{-1} \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{Q}_i$), die sich numerisch als geringfügig günstiger im Vergleich zur Variante I erwiesen hat [Deuter 88], dargestellt:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^1q_{33} & {}^2q_{33} & {}^3q_{33} & {}^4q_{33} & {}^5q_{33} & {}^6q_{33} \\
-{}^1q_{32} & -{}^2q_{32} & -{}^3q_{32} & -{}^4q_{32} & -{}^5q_{32} & -{}^6q_{32} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^1q_{33} & -{}^2q_{33} & -{}^3q_{33} & -{}^4q_{33} & -{}^5q_{33} & -{}^6q_{33} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^1q_{31} & {}^2q_{31} & {}^3q_{31} & {}^4q_{31} & {}^5q_{31} & {}^6q_{31} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^1q_{32} & {}^2q_{32} & {}^3q_{32} & {}^4q_{32} & {}^5q_{32} & {}^6q_{32} \\
-{}^1q_{31} & -{}^2q_{31} & -{}^3q_{31} & -{}^4q_{31} & -{}^5q_{31} & -{}^6q_{31} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^1X & {}^2X & {}^3X & {}^4X & {}^5X & {}^6X \\
{}^1Y & {}^2Y & {}^3Y & {}^4Y & {}^5Y & {}^6Y \\
{}^1Z & {}^2Z & {}^3Z & {}^4Z & {}^5Z & {}^6Z \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\bullet \ \mathbf{dv} \ = \
\begin{bmatrix}
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{11} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{21} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{31} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{41} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{12} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{22} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{32} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{42} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{13} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{23} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{33} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{43} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{14} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{24} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{34} \\
(W^{-1}\bullet{}^2W)_{44}
\end{bmatrix}
$$

K **b**

Eine Betrachtung der Struktur von $\mathbf{U}_i \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{U}_i^{-1}$ bzw. $\mathbf{Q}_i^{-1} \bullet \mathbf{D} \bullet \mathbf{Q}_i$ macht sofort klar, daß einige Zeilen dieser Matrix **K** gleich (0,...,0) oder linear abhängig von anderen Zeilen sind (z.B. Element 2.1 und Element 1.2), so daß unter Berücksichtigung der Aufspaltungsmöglichkeit in Primär- und Sekundärteil bei dualen Zahlen in allen drei Beschreibungsformen nur maximal sechs Zeilen linear unabhängig sind. Damit wird z.B. im Fall a) durch die Auswahl der zu den Elementen 3.2, 1.3, 2.1, 1.4, 2.4, 3.4 gehörenden Zeilen der Matrix **K** ein quadratisches, lineares Gleichungssystem $\mathbf{K'}\bullet\mathbf{dv} = \mathbf{b'}$ zur Berechnung der gesuchten Variablen **dv** bestimmt, das darüberhinaus nur noch auf Transformationsmatrizen der einzelnen Gelenksysteme S_i basiert und somit keine Ableitung der Roboterfunktion erfordert.

Nachdem wir bisher dem Vektor **b** kaum Beachtung geschenkt haben, wollen wir ihn jetzt etwas genauer betrachten. Im Gegensatz zur Koeffizientenmatrix **K**, die durch die Linearisierung Ungenauigkeiten enthält, beschreibt der Vektor **b** die exakten Stellungsinkremente von $\Delta\mathbf{W}\bullet\mathbf{W}^{-1}$ bzw. $\mathbf{W}^{-1}\bullet\Delta\mathbf{W}$. Soll nun das Gleichungssystem keine unlösbaren Widersprüche enthalten, so muß $\Delta\mathbf{W}\bullet\mathbf{W}^{-1}$ bzw. $\mathbf{W}^{-1}\bullet\Delta\mathbf{W}$ die gleiche Struktur wie $\mathbf{U}_i\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{U}_i^{-1}$ bzw. $\mathbf{Q}_i^{-1}\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{Q}_i$ aufweisen. Dies bedeutet, daß zu allen mit (0,...,0) besetzten Zeilen der Matrix **K** ein $b_i = 0$ gehören muß und daß für Zeilen $z_{i\bullet}$ und $z_{j\bullet}$, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, ebenfalls $b_i = -b_j$ gelten muß. Daß dies *für kleine Inkremente* $\Delta\mathbf{W}$ der Fall ist, wird nach den folgenden beiden Bemerkungen gezeigt.

Sehr hilfreich für die Abschätzung der durch die Linearisierungsfehler verursachten Bahnabweichungen wäre eine Korrelation zwischen Bahnabweichung und Abweichung des vorgegebenen, exakten **b** von der in **K** vorliegenden Struktur, die bestimmt ist durch die Nullzeilen und Zeilen $z_{i\bullet}$ und $z_{j\bullet}$, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Daß diese Korrelation nicht gegeben ist, läßt sich durch die Tatsache erklären, daß in **b** keinerlei Information über das kinematische Verhalten des Roboters enthalten ist, und an einem Beispiel klar darlegen:

Bei Verwendung homogener 4×4-Matrizen und bei vorgegebenem $\Delta\mathbf{W}$, das an der Position 1.4 einen sehr großen Wert T aufweist und sonst Null ist, ergibt sich eine Matrix $\mathbf{W}^{-1}\bullet\Delta\mathbf{W}$ bzw. $\Delta\mathbf{W}\bullet\mathbf{W}^{-1}$, die nur in den Elementen 1.4, 2.4 und 3.4 bzw. in 1.4 von Null verschieden ist und damit exakt der in **K** existierenden Struktur genügt. Für einen Roboter mit 6 Rotationsgelenken treten jedoch bei großen Werten von T erhebliche Bahnabweichungen auf, da die durch T festgelegte Zielstellung nicht mehr dicht an der aktuellen Stellung liegt, und so die durch die Abschätzungen der Rotationsvariablen im Verfahren auftretenden Linearisierungsfehler nicht klein gehalten werden können. Damit liegt der Schluß nahe, daß die Forderung nach geringfügigen Strukturabweichungen in **b** zwar eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für einen in vorgegebenem Rahmen exakten Bahnverlauf ist.

Die in $\mathbf{K}\bullet\mathbf{dv} = \sum(\mathbf{U}_i\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{U}_i^{-1})\cdot dv_i$ bzw. $\mathbf{K}\bullet\mathbf{dv} = \sum(\mathbf{Q}_i^{-1}\bullet\mathbf{D}\bullet\mathbf{Q}_i)\cdot dv_i$ auftretenden linearen Abhängigkeiten sind keine direkte Folge der bei Stellungsbeschreibungen existierenden Abhängigkeiten aufgrund der Orthonormalbedingungen, sondern resultieren aus den bei der Linearisierung durchgeführten Abschätzungen und aus der geschickten Multiplikation mit $\mathbf{W}^{-1}$. Dies wird deutlich durch einen Vergleich mit **b**, das diese von der Matrix **K** erzeugte Struktur nicht immer aufweist.

Strukturelle Ähnlichkeit von b und K bei differentiell kleinem Inkrement ΔW

$\mathbf{W}^{neu}$ läßt sich als Produkt zweier Stellungsbeschreibungen darstellen, $\mathbf{W}^{neu}={}^{BKS}\mathbf{Diff}\bullet\mathbf{W}$ bzw. $\mathbf{W}^{neu}=\mathbf{W}\bullet{}^{W}\mathbf{Diff}$, wobei ${}^{BKS}\mathbf{Diff}$ bzw. ${}^{W}\mathbf{Diff}$ eine Stellungsbeschreibung mit sehr kleinem Transformationsverhalten ist. ${}^{BKS}\mathbf{Diff}$ und ${}^{W}\mathbf{Diff}$ unterscheiden sich in der Regel deutlich voneinander. Hiermit gilt:

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{W}^{neu}\text{-}\mathbf{W} = {}^{BKS}\mathbf{Diff}\bullet\mathbf{W}\text{-}\mathbf{W} = ({}^{BKS}\mathbf{Diff}\text{-}\mathbf{E})\bullet\mathbf{W} = \mathbf{W}\bullet({}^{W}\mathbf{Diff}\text{-}\mathbf{E})$$

Bei Multiplikation von rechts mit $\mathbf{W}^{-1}$ erhalten wir:

$$\Delta\mathbf{W}\bullet\mathbf{W}^{-1} = {}^{BKS}\mathbf{Diff}\text{-}\mathbf{E}$$

Bei Multiplikation von links mit $\mathbf{W}^{-1}$ erhalten wir:

$$\mathbf{W}^{-1}\bullet\Delta\mathbf{W} = \quad {}^{W}\mathbf{Diff}\text{-}\mathbf{E}$$

Eine Umformung der Darstellung von **Diff** in einen sechsdimensionalen Beschreibungsvektor $(d_x , d_y , d_z , \rho1, \rho2 , \rho3)$ ist immer möglich. Dies erlaubt folgenden Ansatz in multiplikativer Form:

$$\begin{aligned}\mathbf{Diff} &= \mathbf{Translation}(d_x , d_y , d_z)\bullet\mathbf{R}(a_{\rho1} , \rho1)\bullet\mathbf{R}(a_{\rho2} , \rho2)\bullet\mathbf{R}(a_{\rho3} , \rho3) = \\ &= \{(\mathbf{Translation}(d_x , d_y , d_z)\text{-}\mathbf{E})+\mathbf{E}\}\bullet\{(\mathbf{R}(a_{\rho1} , \rho1)\text{-}\mathbf{E})+\mathbf{E}\}\bullet\{(\mathbf{R}(a_{\rho2} , \rho2)\text{-}\mathbf{E})+\mathbf{E}\}\bullet \\ &\qquad \bullet\{(\mathbf{R}(a_{\rho3} , \rho3)\text{-}\mathbf{E})+\mathbf{E}\} = \\ &= \{\mathbf{dT}+\mathbf{E}\}\bullet\{\Delta_{\rho1}+\mathbf{E}\}\bullet\{\Delta_{\rho2}+\mathbf{E}\}\bullet\{\Delta_{\rho3}+\mathbf{E}\} = \\ &= \{dT+E\}\bullet\{\Delta_{\rho1}\bullet\Delta_{\rho2}\bullet\Delta_{\rho3} + \Delta_{\rho1}\bullet\Delta_{\rho2} + \Delta_{\rho1}\bullet\Delta_{\rho3} + \Delta_{\rho2}\bullet\Delta_{\rho3} + \Delta_{\rho1} + \Delta_{\rho2} + \Delta_{\rho3} + \mathbf{E}\}\end{aligned}$$

Hierbei sind **dT** bzw. Δ_ρ je nach gewählter Darstellungsform homogene 4×4-Matrizen oder duale 3×3-Matrizen oder duale Quaternionen.

Bei Verwendung homogener 4×4-Matrizen gilt: $\mathbf{dT}\bullet\Delta_{\rho i} = \mathbf{0}$

Daraus folgt

$$\mathbf{Diff} = \Delta_{\rho1}\bullet\Delta_{\rho2}\bullet\Delta_{\rho3} + \Delta_{\rho1}\bullet\Delta_{\rho2} + \Delta_{\rho1}\bullet\Delta_{\rho3} + \Delta_{\rho2}\bullet\Delta_{\rho3} + \Delta_{\rho1} + \Delta_{\rho2} + \Delta_{\rho3} + \mathbf{E} + \mathbf{dT}$$

Handelt es sich bei **Diff** - und damit auch bei $(d_x, d_y, d_z, \rho1, \rho2, \rho3)$ - um eine sehr kleine Transformation, dann kann in Analogie zur Abschätzung der Roboterfunktion F mit $\sin(\rho i)\approx\rho i$, $\cos(\rho i)\approx1$ und $\rho j\cdot\ldots\cdot\rho k\approx0$ die Näherungsgleichung

$$\mathbf{Diff} \approx \mathbf{D}_{\rho1}+ \mathbf{D}_{\rho2}+ \mathbf{D}_{\rho3}+ \mathbf{dT} + \mathbf{E}$$

aufgestellt werden. Durch Einsetzen dieser Näherungsgleichung in $\Delta\mathbf{W}\bullet\mathbf{W}^{-1}$ bzw. $\mathbf{W}^{-1}\bullet\Delta\mathbf{W}$ wird **E** eliminiert und der verbleibende Term $\mathbf{D}_{\rho1}+ \mathbf{D}_{\rho2}+ \mathbf{D}_{\rho3}+ \mathbf{dT}$ besitzt die gleiche Struktur wie **K**.

Deutlich soll noch einmal hervorgehoben werden, daß der Rückgriff auf den sechsdimensionalen Beschreibungsvektor $(d_x, d_y, d_z, \rho1, \rho2, \rho3)$ nur zum Beweis der Strukturgleichheit benötigt wurde und bei der Durchführung der Rückwärtsrechnung nicht verwendet werden muß; hier genügen die Werte von $\Delta\mathbf{W}$ und W^{-1}.

Vergleich der Varianten I und II:

a) bei homogenen 4×4-Matrizen:
Hier muß jeweils die dritte Spalte der $\mathbf{U}_i$ und die dritte Zeile der $\mathbf{Q}_i$ berechnet werden. Günstig erweist sich bei der Verwendung der dritten Zeile, daß die Variable des ersten Faktors $\mathbf{Z}_i \bullet \mathbf{X}_{i+1}$ in $\mathbf{Q}_i$ nicht auftritt; dieser Vorteil wird allerdings durch die zusätzliche Multiplikation mit $\mathbf{Z}_n$, die bei der Berechnung der $\mathbf{U}_i$ nicht anfällt, wieder ausgeglichen. Eine Betrachtung der Formeln für X, Y und Z zeigt, daß bis auf das Element ${}^i q_{34}$ alle aktuellen Werte der $\mathbf{Q}_i$ berechnet werden müssen, während im anderen Fall die Auswertung der Elemente ${}^i u_{13}$, ${}^i u_{23}$, ${}^i u_{33}$, ${}^i u_{14}$, ${}^i u_{24}$ und ${}^i u_{34}$ genügt. Da aber zur Bestimmung von $\mathbf{U}_i$ die volle Matrix $\mathbf{U}_{i-1}$ bekannt sein muß, tritt dieser Vorteil erst bei der Berechnung von $\mathbf{U}_n$ auf. Insofern ist der Berechnungsaufwand für die Variante I, d.h. bei Multiplikation mit $\mathbf{W}^{-1}$ von rechts, geringfügig niedriger als bei der Variante II.

b) bei dualen 3×3-Matrizen:
Da bei dualen 3×3-Matrizen die Positionsangaben und Rotationsangaben zusammengefaßt sind, gilt nach dem in a) Gesagten, daß der Berechnungsaufwand für beide Varianten in etwa gleich ist.

c) bei dualen Quaternionen:
Bei Verwendung dualer Quaternionen sind die Formeln, die die Elemente der Matrix **K** definieren, für U und Q identisch; weil jedoch bei der Berechnung der ${}^i q_j$ die zusätzliche Multiplikation mit Z_n anfällt, erweist sich die Variante I als berechnungstechnisch günstiger.

Dem Vorteil der geringfügig effizienteren Berechenbarkeit der Variante I steht bei der Verwendung homogener 4×4-Matrizen eine Anfälligkeit hinsichtlich der numerischen Genauigkeit gegenüber. Der in Abschnitt 2.6.1 dargestellte Summenterm S für die exakte Beschreibung der inkrementellen Stellungsänderung **Z-A** erhält durch die Multiplikation mit mindestens einer Matrix Δ_i folgende Form:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wird dieser Term von links mit der invertierten aktuellen Stellung $\mathbf{W}^{-1}$ multipliziert (Variante II), so erlangen die Positionselemente in $\mathbf{W}^{-1}$ wegen der Nullen in der 4. Zeile keine Bedeutung. Das aus der Jacobi-Matrix resultierende lineare Gleichungssystem wird also nur durch eine ortho*normale* Transformation verändert; Zeilen- und Spaltennormen im Gleichungssystem bleiben konstant und es tritt daher keine Verschlechterung der Kondition ein [Deuter 88]. Im Gegensatz dazu sind bei einer Multiplikation des $\mathbf{W}^{-1}$ von rechts (Variante I) die Positionselemente von **W** sehr wohl in dem neu entstandenen Matrixprodukt vorhanden. Im Zuge der Linearisierung werden einige der Summanden aus S als vernachlässigbar klein eingestuft und deshalb gestrichen. Da aber für $a \to 0$ und $b \to \infty$

das Produkt a·b nicht mehr zwangsläufig gegen Null geht, führt diese Tatsache in der Variante I bei einer sehr weit vom Ursprung entfernten aktuellen Stellung **W** zu einer Vergrößerung der Linearisierungsfehler und zusätzlich zu einer starken Veränderung der Zeilen- und Spaltennormen des linearen Gleichungssystems, sodaß eine Konditionsverschlechterung nicht ausgeschlossen werden kann. Die Orientierungswerte in $\mathbf{W}^{-1}$ sind dagegen aufgrund der Normiertheitsbedingung ungefährlich.

In der Darstellung mit dualen 3×3-Matrizen und dualen Quaternionen erhalten große Positionswerte der aktuellen Stellung W sowohl bei Rechts- wie auch bei Linksmultiplikation Einfluß auf die entstehenden Summanden; die beiden Varianten I und II sind unter diesem Aspekt gleichwertig.

Abgesehen von der Varianten II mit homogenen 4×4-Matrizen muß der Einfluß der aktuellen Position des Roboters auf die Größe der Linearisierungsfehler als Preis für die Überwindung der Überbestimmtheit des linearen Gleichungssystems akzeptiert werden.

2.6.3 Vergleichende Bewertung der expliziten und der inkrementellen Rückwärtsrechnung

Der Vorteil der inkrementellen liegt in ihrer Anwendbarkeit auf alle Roboterkonstruktionen. Dem stehen jedoch im Vergleich zu geschlossenen Lösungen einige erhebliche Nachteile gegenüber:

1. Für die inkrementelle Rückwärtsrechnung sind nur kleine Distanzen zwischen Ziel und aktueller Stellung zulässig. Diese Forderung ist bei Bahnsteuerungen durch dichte Punktvorgabe oder bei sensorgeführten Effektorbewegungen erfüllt. Das eigentliche Problem liegt jedoch darin, daß keine Aussage darüber getroffen werden kann, wie klein $\Delta\mathbf{W}$ in der jeweiligen Situation sein muß, um ein Übersteigen der maximal zulässigen Grenze der Bahnabweichung sicher zu verhindern.

2. Da auch beim inkrementellen Verfahren Sinus- und Cosinusausdrücke ausgewertet werden müssen und in jedem Zyklus zur Vermeidung der Fehleraddition eine Vorwärtsrechnung nötig ist, erweist sich bei Roboterklassen, die zu sukzessive quadratisch geschlossenen Lösungsformeln führen, die explizite Berechnung als effizienter.

3. Durch die explizite Lösung ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Gelenkvariablen und der Effektorstellung gegeben. Durch Differentiation nach der Zeit lassen sich daraus auch exakte Gleichungen für die Gelenkgeschwindigkeit und -beschleunigung gewinnen.

4. Die inkrementelle Rückwärtsrechnung erlaubt keinen Überblick über die Gesamtheit der zur Erreichung einer Zielvorgabe geeigneten Gelenkstellungen. Im Zuge einer vorausschauenden Bahnplanung und Kollisionsvermeidung ist dies jedoch sehr hilfreich. In diesem Zusammenhang erweist sich auch der Zwang zu kleinen Inkrementen als ausgesprochen hinderlich, zumindest aber als zeitraubend.

5. Eine a-priori-Behandlung von lokalen Degenerationsstellungen und Reduktionsstellungen ist nur durch eine Determinantenberechnung der quadratischen Matrix **K'** möglich. Ist der Wert der Determinante gleich Null, so muß diese Stellung einer bestimmten Gelenkvariablenkonfiguration zugeordnet werden. Hierzu muß die Determinante durch Intuition geeignet faktorisiert werden. Eine Unterscheidung von lokaler Degenerationsstellung und Reduktionsstellung ist anhand der Determinantenanalyse nicht möglich. Ebenso sind unerreichbare Stellungen nicht formelmäßig beschreibbar, sondern fallen höchstens durch eine ungewöhnlich hohe Bahnabweichung auf. Auch das Arbeiten im Grenzbereich des zulässigen Arbeitsraumes erweist sich als problematisch, weil bei unzulässigen Gelenklösungen nicht klar ist, ob die Zielstellung tatsächlich unzulässig ist oder nur Näherungsfehler vorliegen.

Index

Literaturverzeichnis

[Ball 1876] R. S. Ball, "Theory of Screws: A Study in the Dynamics of a Rigid Body", University Press, Hodges, Forster & Co., Dublin, 1876.

[Baumeister 86] M. Baumeister, "Ermittlung von Roboterklassen mit Lösungspolynomen vom Grad 4", Institut für Informatik der TU München, Diplomarbeit, November 1986.

[Brand 57] L. Brand, "Vector Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1957.

[Blaschke 60] W. Blaschke, "Kinematik und Quaternionen", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

[Bronstein 74] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Zürich, Frankfurt/Main, 1974.

[Cevik 87] M.K. Cevik, "Ein Beitrag zur vollständigen digitalen Lageregelung von Servoantrieben ohne Tachogenerator am Beispiel eines Industrieroboters mit verteilter Intelligenz", Fachbereich Elektrotechnik der TU Berlin, Dissertation, 1987.

[Denavit 55] J. Denavit and R.S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", ASME J. Appl. Mech. 22, 1955, 215-221.

[Deuter 88] M. Deuter und M. Hornung, "Vergleich zweier Varianten zur inkrementellen Rückwärtdlösung am Beispiel des PUMA560", Institut für Informatik der TU München, Fortgeschrittenenpraktikum, 1988.

[Giloi 78] W.K. Giloi, "Interactive computer graphics", Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1978.

[Glavina 85] B. Glavina, "Mathematische Darstellungen von räumlichen Bewegungen und ihre Einsatzmöglichkeiten in der Roboterkinematik", Institut für Informatik der TU München, Diplomarbeit, November 1985.

[Heindl 83] J. Heindl, "Einführung in Kinematik und Programmierverfahren von Industrierobotern", Unterlagen zum Lehrgang R2.02 "Roboter mit Tastsinn" der CCG, Oberpfaffenhofen, 4.7. - 8.7.1983, Kapitel 0.

[Heiß 85] H. Heiß, "Die explizite Lösung der kinematischen Gleichung für eine Klasse von Industrierobotern", Fachbereich Informatik der TU Berlin, Dissertation, April 1985.

[Hiller 86] M. Hiller und C. Woernle, "Ein systematisches Verfahren zur numerischen Behandlung der Rückwärtstransformation bei Industrierobotern", in VDI-Berichte 598, "Steuerung und Regelung von Robotern", VDI-Verlag, Düsseldorf, 1986, 147-161.

[Lara-Feria 86] A. Lara-Feria and J. Verdaguer-Codina, "Quaternions applied to direct and inverse robot kinematics problem", in P. Kopacek, I. Troch and K. Desoyer (eds.), "Int. Symp. of Theory of Robots (Preprints)", IFAC, Vienna, 1986, 7-11.

[Lee 82] C.S.G. Lee, "Robot arm kinematics, dynamics, and control", IEEE Computer, December 1982, 62-79.

[Meyberg 75] K. Meyberg, "Algebra, Teil 1", Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1975.

[Meyberg 76] K. Meyberg, "Algebra, Teil 2", Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1976.

[Newman 79] W.M. Newman, R.F.Sproull, "Principles of InteractiveComputer Graphics", McGraw-Hill, Japan, 1979.

[Paul 81a] R.P. Paul, "Robot manipulators: mathematics, programming, and control", MIT Press, Cambridge (Mass.), London, 1981.

[Paul 81b] R.P. Paul, B. Shimano and G.E. Mayer, "Kinematic control equations for simple manipulators", IEEE Systems, Man and Cybernetics 6, June 1981, 449-455.

[Paul 81c] R.P. Paul, B. Shimano and G.E. Mayer, "Differential kinematic control equations for simple manipulators", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics 6, June 1981, 456-460.

[Penna 86] M.A. Penna and R.R. Patterson, "Projective geometry and its application to computer graphics", Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1986.

[Pfeiffer 87] F. Pfeiffer und E. Reithmeier, "Roboterdynamik", Unterlagen zum Lehrgang R2.03 "Roboterdynamik" der CCG, Oberpfaffenhofen, 24.3. - 26.3.1987.

[Pieper 69] D.L. Pieper, "The kinematics of manipulators under computer control", Stanford University, Ph.D. Thesis, 1969.

[Reinsch 74] C. Reinsch, "Einführung in die numerische Mathematik", Institut für Mathematik der TU München, Vorlesungsskriptum, 1974.

[Rooney 75] J. Rooney, "On the principle of transference", in "Proc. of the 4th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms", I. Mech. E., Newcastle upon Tyne, 1975, 1088-1092.

[Rooney 77] J. Rooney, "A survey of representations of spatial rotation about a fixed point", Enviroment and Planning B, 1977, 185-210.

[Rooney 78] J. Rooney, "A comparison of representations of general spatial screw displacement", Enviroment and Planning B, 1978, 45-88.

[Roth 76] B. Roth, "Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint", National Bureau of Standards, Special Publications 459, 1976, 39-61.

[Waldhauser 87] F. Waldhauser, "Vergleich der Rückwärtsrechung mittels kinematischer Gleichung bzw. charakteristischem Gelenkpaar", Institut für Informatik der TU München, Diplomarbeit, Mai 1987.

[Yang 69] A.T. Yang, "Displacement analysis of spatial five-link mechanisms using (3×3) matrices with dual-number elements", ASME Journal of Engineering for Industry, Feb. 1969, 152-157.

[Yang 74] A.T. Yang, "Calculus of screws", in W.R. Spillers (ed), "Basic questions of design theory", North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.