2.2 Grundlagen der Rückwärtsrechnung

Mit Hilfe der Vorwärtsrechnung wurde die Roboterfunktion $F(v_1,...,v_n)$ ermittelt, die die Effektorstellung $^{BKS}\mathbf{Effektor}$ bei vorgegebenen Gelenkvariablen v_i ermittelt. Sehr viel häufiger stellt sich die Frage, welche Werte die Gelenkvariablen v_i annehmen müssen, damit eine bestimmte Effektorstellung, im folgenden mit *Zielstellung* $^{BKS}\mathbf{Ziel}$ bezeichnet, erreicht wird. Die Bestimmungsgleichung für die Gelenkvariablen v_i, $1 \leq i \leq n$, die sogenannte *kinematische Gleichung*, heißt also:

$$F(v_1, \ldots, v_n) = \mathbf{D}_{0,1} \bullet \left(\prod_{i=1}^{n} (\mathbf{Z}_i(v_i) \bullet \mathbf{X}_{i+1}) \right) \bullet \mathbf{TR} = \left(\prod_{i=0}^{n} (\mathbf{Z}_i \bullet \mathbf{X}_{i+1}) \right) \bullet \mathbf{TR} = \mathbf{Ziel}$$

Die Aufgabe der Rückwärtsrechnung besteht nun genau in der Lösung dieser kinematischen Gleichung. Im Gegensatz zur Vorwärtsrechnung, die für alle Roboter nach einem fest vorgegebenen Algorithmus, dem D-H-Verfahren, durchgeführt werden kann, existiert für die Rückwärtsrechnung kein allgemeines Verfahren, mit dem für alle Roboter explizite Lösungsformeln für die Gelenkvariablen gewonnen werden können. Um überhaupt einen systematischen Zugang zur Lösung der kinematischen Gleichung zu finden, ist es sinnvoll, Vereinfachungen der kinematischen Gleichung vorzunehmen, sowie einige Sätze und Definitionen bereitzustellen.

2.2.1 Vereinfachungsmöglichkeiten für die Rückwärtsrechnung

Im Rahmen der Rückwärtsrechnung wird bei Drehgelenken statt dem Drehwinkel δ_i nur die Variable d_i und bei Schubgelenken statt der Größe η_i nur die Variable t_i benutzt. Wurde die Null-Lage des betrachteten Roboters nicht optimal gewählt und treten deshalb neben den Gelenkvariablen noch die konstanten Werte ϑ_i bzw. h_i auf, dann können *nach der Ermittlung* der Gelenkvariablen d_i bzw. t_i die Substitutionen "d_i wird ersetzt durch $d_i+\vartheta_i$" bzw. "t_i wird ersetzt durch t_i+h_i" vorgenommen werden.

Ebenso führt die bei der Vorwärtsrechnung schon erwähnte Möglichkeit, Variablen paralleler parallele Rotationsachsen zu einer Variablen zusammenfassen zu können (vgl. Abschnitt 2.1.4), zu einer Vereinfachung der kinematischen Gleichung.

Die kinematische Gleichung kann dadurch weiter vereinfacht werden, daß die konstanten Randoperanden $\mathbf{Z}_0 \bullet \mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_{n+1} \bullet \mathbf{TR}$ auf die rechte Gleichungsseite gebracht und mit der Zielstellung zusammengefaßt werden. Aufgrund der Kommutativität von Rotation und Translation bezüglich der *gleichen Achse* kann für die neuen Randoperanden $\mathbf{Z}_1$ und $\mathbf{Z}_n$ der konstante Translationsteil $\mathbf{T}(\mathbf{z}_i, h_i)$ bzw. Rotationsteil $\mathbf{R}(\mathbf{z}_i, \vartheta_i)$ für Rotations- bzw. Translationsgelenke nach außen gezogen, auf die rechte Gleichungsseite gebracht und ebenfalls mit der Zielstellung zusammengefaßt werden. Damit ergibt sich für die *Standardform der* eine modifizierte Zielstellung $\mathbf{W}$. Die verkürzte linke Gleichungsseite, die alle sechs zu bestimmenden Gelenkvariablen enthält, wird mit $\mathbf{M}$ abgekürzt. Somit erhalten wir die *kinematische Grundgleichung*: $\mathbf{M} = \mathbf{W}$

Betrachten wir als Beispiel die nicht abgekürzte Notation der kinematischen Grundgleichung für den Fall, daß G_1 und G_n Rotationsgelenke sind:

$$\mathbf{R}_1(z_1,d_1)\bullet\mathbf{X}_2\bullet\prod_{i=2}^{n-1}(\mathbf{Z}_i\bullet\mathbf{X}_{i+1})\bullet\mathbf{R}_n(z_n,d_n) = (\mathbf{Z}_0\bullet\mathbf{X}_1\bullet\mathbf{T}_1(z_1,h_1))^{-1}\bullet\mathbf{Ziel}\bullet(\mathbf{T}_n(z_n,h_n)\bullet\mathbf{X}_{n+1}\bullet\mathbf{TR})^{-1}$$

Wir bezeichnen die so erhaltene kinematische Grundgleichung als einen *Ansatz* zur Lösung der kinematischen Gleichung. Weitere Ansätze zur Lösung der kinematischen Gleichung können dadurch gewonnen werden, daß weitere Randmatrizen auf die rechte Seite gebracht werden. Es kann zum Beispiel sinnvoll sein, nachdem bereits die Gelenkvariable v_1 bestimmt wurde, die v_1 enthaltende Matrix mit der bekannten Matrix **W** auf der rechten Seite der Gleichung zusammenzufassen.

Diese durch Invertierung von Matrizen gewonnenen neuen Ansätze haben eine Veränderung von - und Zielsystem zur Folge. Das Bezugsystem ist also nicht mehr das Bezugskoordinatensystem BKS, sondern das Koordinatensystem, auf das sich das linke Randkoordinatensystem im neuen Ansatz bezieht. Ebenso ist das Zielsystem nicht mehr das Effektorkoordinatensystem S_E, sondern das rechte Randkoordinatensystem im neuen Ansatz.

Beispiel: In der obigen kinematischen Grundgleichung wäre also das für $\mathbf{R}_1(z_1,d_1)$ zugrundeliegende Koordinatensystem das neue Bezugsystem und das durch $\mathbf{R}_n(z_n,d_n)$ erreichte Koordinatensystem das neue Zielsystem.

Durch geeignete Umformung der kinematischen Grundgleichung sind wir also immer in der Lage, für beliebig vorgegebene Bezug- und Zielsysteme den zugehörigen Ansatz aufzustellen. Auf dieser Möglichkeit setzen im wesentlichen die in Kapitel 2.3 und 2.4 beschriebenen Verfahren zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung auf.

2.2.2 Klassifikation von Roboterkonstruktionen und Zielvorgaben

Da kein für alle Roboter gültiges Verfahren zur Herleitung einer expliziten Lösung der kinematischen Gleichung existiert, wird in Kapitel 2.3 und 2.4 nach Klassifikationskriterien gesucht, die eine geeignete Klassenbildung bei Robotern und eine Zuordnung verschiedener expliziter Lösungsverfahren zu den einzelnen Klassen erlauben. Für diesen Zweck sind die folgenden Definitionen und Sätze nützlich.

Definition: Roboter und Roboterklasse

Ein *Roboter* mit n Gelenken ist eindeutig definiert durch n Vierertupel $(\delta_i,\eta_i,l_i,\alpha_i)$, die jeweils die 4 Denavit-Hartenberg-Parameter des einzelnen Gelenkübergangs $\mathbf{D}_{i,i+1}$ enthalten.

Eine *Roboterklasse* besteht aus n Verertupel ($\delta_i,\eta_i,l_i,\alpha_i$), bei denen neben den Gelenkvariablen auch einige mechanische Konstanten (z.B. l_i) parametrisiert sind. Für einen konkreten Roboter sind diese mechanischen Parameter natürlich mit festen Zahlenwerten belegt.

Definition: Globale und lokale Degeneration

Eine Roboterkonstruktion heißt *global degeneriert*, wenn ihr Freiheitsgrad $f < 6$ ist; eine *lokale* liegt genau dann vor, wenn sich der Freiheitsgrad f nur für gewisse Gelenkstellungen v_i, $1 \le i \le n$, auf $f < 6$ verringert. Diese speziellen Gelenkstellungen heißen *Degeneration-sstellungen.*

Die Lösung der kinematischen Gleichung für global degenerierte Roboter ist wegen der geringen Anzahl der zu bestimmenden Gelenkvariablen leichter zu ermitteln. Die Einschränkung des Freiheitsgrades kann jedoch bei vielen Anwendungen die Benutzung eines global degenerierten Roboters unmöglich machen. Im weiteren werden global degenerierte Roboter nicht mehr betrachtet.

Roboter mit lokalen Degenerationsstellungen weisen diesen Nachteil nicht auf, da durch mechanische Gelenkbegrenzungen oder durch Maßnahmen in der Robotersteuerung alle Degenerationsstellungen vermieden werden können. Da jedoch in der Nähe einer lokalen Degenerationsstellung zwar der Freiheitsgrad f=6 erhalten bleibt, aber der erreichbare Arbeitsraum stark schrumpft, stellt auch das Auftreten einer lokalen Degeneration einen konstruktiven Nachteil dar. Hier muß geprüft werden, ob dieser reduzierte Arbeitsraum noch einen sinnvollen Robotereinsatz ermöglicht; gegebenenfalls kann durch Vermeidung der Degenerationsstelle und ihrer näheren Umgebung wenigstens die Arbeitsraum-transparenz für den Anwender erhalten bleiben.

Insofern ist es wichtig, daß bei der Lösung der kinematischen Gleichung *alle Degenerationsstellungen* erfaßt werden.

Satz: Global degenerierte Roboterkonstruktionen

Ein Roboter ist genau dann Roboterglobal degeneriert, wenn für die aus der kinematischen Gleichung zu berechnenden sechs Gelenkvariablen eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:

a) Es existieren drei aufgrund der mechanischen Konstruktion komplanare Translations-gelenke.

b) Mehr als drei Gelenke bewegen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in zueinander parallelen Ebenen.

c) Es existieren vier Rotationsgelenke, deren Drehachsen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneiden.

d) Es existieren zweimal drei Rotationsgelenke, deren Drehachsen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneiden (zwei Dreifach-Schnittpunkte);
diese Konstruktion läßt sich durch folgende Roboterklasse beschreiben:
$(d_1,h_1,0,\alpha_1)$ $(d_2,0,0,\alpha_2)$ (d_3,h_3,l_3,α_3) $(d_4,h_4,0,\alpha_4)$ $(d_5,0,0,\alpha_5)$ (d_6,h_6,l_6,α_6)

e) Die Rotationsachsen von zwei Rotationsgelenken fallen aufgrund der mechanischen Konstruktion zusammen. Dies können z.B. zwei direkt benachbarte Rotationsgelenke Ri und Ri+1 mit $l_i=0$ und $\sin(\alpha_i)=0$ sein.

f) Es existieren drei Rotationsgelenke, deren Drehachsen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in einem Punkt schneiden (Dreifach-Schnittpunkt), und die anderen drei Gelenke bewegen sich aufgrund der mechanischen Konstruktion in zueinander parallelen Ebenen.

g) Zwei Translationsgelenke sind aufgrund der mechanischen Konstruktion zueinander parallel.

h) Anzahl der Translationsgelenke + (Anzahl der aufgrund der mechanischen Konstruktion parallelen Rotationsgelenke -1) > 3

Beweis:
Zuerst wird gezeigt, daß jede der Bedingungen a) bis h) eine global degenerierte Roboterkonstruktion impliziert:

zu a) Drei komplanare Translationsgelenke verändern die Orientierung nicht und decken nur einen zweidimensionalen Positionsraum ab. Der dritte Freiheitsgrad für die Position und die drei Freiheitsgrade für die Orientierung können mit den restlichen drei Gelenken nicht verwirklicht werden. Es fehlt entweder ein Gelenk zur Positions- oder zur Orientierungseinstellung.

zu b) Bei n parallelen Rotationsgelenken kann die Orientierungsänderung immer durch eine Variable ausgedrückt werden (vgl. Abschnitt 2.2.1), d.h. es wird durch diese parallelen Rotationsgelenke genau ein Orientierungsfreiheitsgrad abgedeckt. Da die Gelenke parallel sind, kann hierdurch höchstens ein zweidimensionaler Positionsraum, also weitere zwei Positionsfreiheitsgrade erreicht werden. Mit n parallelen Rotationsgelenken kann deshalb maximal ein Freiheitsgrad f=3 erreicht werden. Gibt es nun bei sechs Gelenken bereit n>3 parallele Rotationsgelenke, so bleiben nur höchstens zwei Gelenke übrig, mit denen die restlichen drei Freiheitsgrade erreicht werden müßten. Da dies unmöglich ist, sind solche Roboterkonstruktionen global degeneriert.

zu c) Sei i die Position des ersten der vier sich schneidenden Rotationsgelenke in der kinematischen Kette, dann erzwingt der gemeinsame Schnittpunkt folgende D-H-Parameter für die vier Rotationsgelenke:

$...(d_i,h_i,0,\alpha_i)\ (d_{i+1},0,0,\alpha_{i+1})\ (d_{i+2},0,0,\alpha_{i+2})\ (d_{i+3},h_{i+3},l_{i+3},\alpha_{i+3})...$

Die kinematische Gleichung $\mathbf{D}_{0,1}\bullet...\bullet\mathbf{D}_{n,n+1}\bullet\mathbf{TR}=\mathbf{Ziel}$ kann stets umgeformt werden zu folgendem Ansatz:

$$\mathbf{D}_{i,i+1}\bullet\ldots\bullet\mathbf{D}_{i+3,i+4} = \left(\prod_{j=0}^{i-1}\mathbf{D}_{j,j+1}\right)^{-1}\bullet\mathbf{Ziel}\bullet\mathbf{TR}^{-1}\bullet\left(\prod_{j=i+4}^{n}\mathbf{D}_{j,j+1}\right)^{-1}$$

Eine Aufspaltung der Matrix $\mathbf{D}_{i+3,i+4}$ in ihren variablen Rotationsanteil $\mathbf{R}(\mathbf{z}_{i+3},d_{i+3})$ und eine konstante Matrix $\mathbf{D}_K(0,h_{i+3},l_{i+3},\alpha_{i+3})$ führt zu folgendem Ansatz:

$$\mathbf{D}_{i,i+1}\bullet\ldots\bullet\mathbf{D}_{i+2,i+3}\bullet\mathbf{R}(\mathbf{z}_{i+3},d_{i+3}) = \left(\prod_{j=0}^{i-1}\mathbf{D}_{j,j+1}\right)^{-1}\bullet\mathbf{Ziel}\bullet\mathbf{TR}^{-1}\bullet\left(\prod_{j=i+4}^{n}\mathbf{D}_{j,j+1}\right)^{-1}\bullet\mathbf{D}_K^{-1}$$

Im Matrixprodukt der linken Gleichungsseite tritt in der vierten Spalte $s_4=(0,0,h_i,1)^T$ keine Variable auf, da die vier Rotationsgelenke sich im Ursprung des neuen Zielsystems schneiden und somit seine Position nicht verändern können. Auf der linken Gleichungsseite befinden sich vier Variablen, also kann auf der rechten Seite mit den zwei restlichen Gelenkvariablen nie der volle Positionsfreiheitsgrad f=3 erreicht werden. Die Roboterkonstruktion ist global positionsdegeneriert.

Nebenbemerkung ohne Beweis: Bei Robotern mit dem Getriebefreiheitsgrad F > 6 beseitigt die Festlegung der Gelenkvariablen von einem oder zwei der vier sich schneidenden Rotationsgelenke zwar die globale Degeneration, diese Gelenke haben jedoch – ähnlich wie die erste von zwei identischen Rotationsachsen – keine Auswirkung auf die Stellung eines Roboterelements und könnten deshalb durch starre Gelenkübergänge ersetzt werden.

zu d) Diese Roboterkonstruktion wird durch folgende D-H-Parameter beschrieben:

$(d_1,h_1,0,\alpha_1)\ (d_2,0,0,\alpha_2)\ (d_3,h_3,l_3,\alpha_3)\ (d_4,h_4,0,\alpha_4)\ (d_5,0,0,\alpha_5)\ (d_6,h_6,l_6,\alpha_6)$

Die zugehörige kinematische Gleichung kann in folgender Form angegeben werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{z}_1,d_1)\bullet\mathbf{R}(\mathbf{x}_1,\alpha_1)\bullet\mathbf{D}_{2,3}\bullet\ldots\bullet\mathbf{D}_{4,5} &= \mathbf{T}(\mathbf{z}_1,h_1)^{-1}\bullet\mathbf{Ziel}\bullet\mathbf{TR}^{-1}\bullet(\mathbf{D}_{5,6}\bullet\mathbf{D}_{6,7})^{-1} = \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{z}_1,h_1)^{-1}\bullet\mathbf{W}\bullet(\mathbf{D}_{5,6}\bullet\mathbf{R}(\mathbf{z}_6,d_6))^{-1}\end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz haben wir das Bezugsystem in den Schnittpunkt der ersten drei sich schneidenden Achsen und das Zielsystem in den Schnittpunkt der zweiten drei sich schneidenden Achsen gelegt. Damit ist klar, daß die Rotationsgelenkachsen durch den Ursprung des Zielsystems keinen Beitrag zur Positionsänderung des Zielsystems liefern können. Zur Untersuchung, welchen Beitrag die Rotationsgelenkachsen durch den Ursprung des Bezugsystems zur Positionsveränderung des Zielsystems liefern, betrachten wir den Abstand zwischen Bezug- und Zielsystem. Aus den Koordinaten des Ursprungs

(u_x,u_y,u_z) des Zielsystems, die ja gerade in der vierten Spalte der homogenen 4×4-Matrix stehen, läßt sich der Abstand einfach als $\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$ berechnen. Betrachten wir der Einfachheit halber das Quadrat des Abstands, so erhalten wir aus obigem Ansatz folgende Abstandsgleichung:

$$h_3^2+l_3^2+h_4^2+2\cdot h_3\cdot h_4\cdot\cos(\alpha_3) = W_{14}^2+W_{24}^2+(W_{34}-h_1)^2$$

Da dieser Ausdruck keine Variable enthält, deckt diese Roboterkonstruktion mit ihren Positionierungsmöglichkeiten nur eine Kugel mit dem Mittelpunkt $(0,0,h_1,1)^T$ und dem Radius $h_3^2+l_3^2+h_4^2+2\cdot h_3\cdot h_4\cdot\cos(\alpha_3)$ ab und ist deshalb global positionsdegeneriert. Daß statt dessen für die Orientierung eine überflüssige Gelenkachse existiert, wird dadurch deutlich, daß die Verbindungselemente zwischen den beiden Schnittpunkten der drei sich schneidenden Achsen – wie ein gekröpfter Handbohrer – beliebig gedreht werden können, ohne daß dies eine Auswirkung auf den Effektor hat.

zu e) Fallen die beiden Drehachsen $\mathbf{z}_{Ri}$ und $\mathbf{z}_{Ri+1}$ zusammen (im Beispiel wegen l_i=0 und $\sin(\alpha_i)$=0), dann ist klar, daß mit Ri auch keine anderen Stellungsänderungen als mit Ri+1 durchgeführt werden können. Deshalb ist eines der beiden Gelenke überflüssig und der Freiheitsgrad des Roboters verringert sich auf $f \leq 5$.

Analog zu Fall c) bietet sich auch bei Robotern mit einem Getriebefreiheitsgrad $F > 6$ kein sinnvoller Einsatz eines solchen Gelenks an.

zu f) Seien **R1**, **R2** und **R3** die Transformationsmatrizen der drei sich schneidenden Rotationsgelenke. Die Matrizen **A** und **C** sollen das Produkt aus den Transformationsmatrizen der anderen drei Gelenke bzw. die Einheitsmatrix darstellen. Da parallele Translations- und Rotationsgelenke in ihrer Reihenfolge vertauscht werden dürfen (vgl. [Heiß 85]), ergibt sich dann folgender Ansatz für die kinematische Gleichung:

A•R1•R2•R3•C = **Ziel**

Da sich die Gelenke mit den zugehörigen Transformationsmatrizen **A** und **C** in parallelen Ebenen bewegen, muß entweder **A**=**E** oder **C**=**E** gelten (oder die Bedingung e ist für die Gelenke R1, R2 oder R3 erfüllt). Mit Hilfe des Spiegelungssatzes [Heiß 85] läßt sich zeigen, daß beide Varianten gleichwertig sind; damit kann sich der folgende Beweis auf die kinematische Gleichung **A•R1•R2•R3** = **Ziel** beschränken. Wird nun ein neues Bezugsystem **B** mit seinen x- und y-Achsen in eine der parallelen Bewegungsebene gelegt und die kinematische Gleichung umgeformt in

$$\mathbf{B{\bullet}A{\bullet}R1{\bullet}R2{\bullet}R}(\mathbf{z}_{R3},d_{R3}) = \mathbf{B{\bullet}Ziel{\bullet}}(\mathbf{T}(\mathbf{z}_{R3},h_{R3})\mathbf{{\bullet}T}(\mathbf{x}_{R3},l_{R3})\mathbf{{\bullet}R}(\mathbf{x}_{R3},\alpha_{R3}))^{-1},$$

dann treten weder auf der linken noch auf der rechten Seite des Ansatzes in der z-Komponente der Positionsspalte (Element 3.4) Gelenkvariablen auf: Das heißt, daß der Positionsfreiheitsgrad < 3 und damit der Roboter global degeneriert ist.

zu g) Zwei aufgrund der mechanischen Konstruktion parallele Translationsgelenke besitzen nur den Positionsfreiheitsgrad f=1; damit ist eines der Translationsgelenke überflüssig und der Freiheitsgrad des Roboters verringert sich auf $f \leq 5$.

zu h) Da n ($n \leq 3$, sonst Fall b) parallele Rotationsgelenke nur den Orientierungsfreiheitsgrad f=1 haben (vgl. auch Beweis zu b), können folgende Fälle unterschieden werden:

Ein alleinstehendes, also "zu sich selber" paralleles Rotationsgelenk, mehr als drei Translationsgelenke: Durch mehr als drei Translationsgelenke kann nur $f \leq 3$ erreicht werden. Damit stehen weniger als drei Rotationsgelenke zur Erreichung der drei Orientierungsfreiheitsgrade zur Verfügung.

Zwei parallele Rotationsgelenke, mehr als zwei Translationsgelenke: Durch zwei parallele Rotationsgelenke wird der Orientierungsfreiheitsgrad f=1 erreicht. Damit steht höchstens noch ein Rotationsgelenk zur Erreichung der restlichen zwei Orientierungsfreiheitsgrade zur Verfügung.

Drei parallele Rotationsgelenke, mehr als ein Translationsgelenk: Durch das dritte parallele Rotationsgelenk wird ebenfalls nur der Orientierungsfreiheitsgrad f=1 erreicht. Die Situation ist wie im vorigen Fall.

Alle drei Fälle führen also zu global degenerierten Roboterkonstruktionen.

Zu beweisen ist noch die Implikation, daß jede global degenerierte Roboterkonstruktion mindestens eine der Eigenschaften a) bis h) aufweist. Der Nachweis erfolgt durch Widerspruchsannahme; es wird gezeigt, daß die Bedingung "$\neg(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f \vee g \vee h)$" immer zu Konstruktionen mit dem Freiheitsgrad 6 führt und dies bedeutet, daß sowohl der Positionsfreiheitsgrad 3 als auch der Orientierungsfreiheitsgrad 3 erreicht wird.

Aus $\neg h$ folgt, daß mindestens drei orientierungsändernde Rotationsgelenke existieren, der Orientierungsfreiheitsgrad f=3 wird erreicht.

Nachweis des Positionsfreiheitsgrades f=3:

Hier bietet sich eine Unterteilung nach der Anzahl der in der Konstruktion enthaltenen Translationsgelenke an:

- drei Translationsgelenke (mehr sind wegen $\neg h$ nicht möglich):
  $\neg a$ garantiert den vollen Positionsfreiheitsgrad f=3 .

- zwei Translationsgelenke:
  $\neg g$ verhindert eine Degeneration zwischen den beiden Translationsgelenken und $\neg c$ garantiert mindestens ein positionsänderndes Rotationsgelenk; dieses neben den zwei Translationsgelenken noch benötigte positionsändernde Rotationsgelenk darf nicht senkrecht auf beiden Translationsachsen stehen, da der Positionsraum sonst zu einer Ebene degeneriert.

  Folgende Situationen sind kritisch:

- drei sich schneidende Rotationsgelenke, denn dadurch wird das positionsändernde vierte Rotationsgelenk eindeutig festgelegt: ¬f garantiert den Positionsfreiheitsgrad f=3 .

- zwei zueinander parallele Rotationsgelenke (mehr gibt es wegen ¬h nicht!): Das erste parallele Rotationsgelenk muß zur Positionseinstellung verwendet werden, ¬b und ¬e garantieren den Positionsfreiheitsgrad f=3 .

• ein Translationsgelenk:
¬c garantiert mindestens zwei positionsändernde Rotationsgelenke und ¬e verhindert den Ausfall einer für die Positionseinstellung eingesetzten Rotationsachse; damit ist der Positionsfreiheitsgrad f=2 sichergestellt und der volle Positionsfreiheitsgrad f=3 wird nur dann nicht erreicht, wenn sich alle zur Positionseinstellung befähigten Gelenke in parallelen Ebenen bewegen. Dies wird durch die Bedingungen ¬b und ¬f unterbunden.

• kein Translationsgelenk:
¬c garantiert mindestens drei positionsändernde Rotationsgelenke und ¬e verhindert den Ausfall einer für die Positionseinstellung eingesetzten Rotationsachse; damit ist der Positionsfreiheitsgrad f=2 sichergestellt und der volle Positionsfreiheitsgrad f=3 wird nur dann nicht erreicht, wenn sich alle zur Positionseinstellung befähigten Rotationsgelenke in parallelen Ebenen bewegen oder sich dauernd in einem Punkt schneiden (zweiter Dreifach-Schnittpunkt). Im zweiten Fall reduziert sich der Positionsraum auf eine Kugel**oberfläche**. ¬b , ¬f und ¬d verhindern diese Degenerationen.

Definition: Klassifikation von Effektorstellungen

• Eine vorgegebene heißt *mehrdeutig*, wenn sich mehr als ein n-Tupel von Werten für die Gelenkvariablen finden läßt, durch das der Effektor in die gewünschte Stellung gebracht werden kann.
Bei Robotern mit dem Freiheitsgrad f=6 ist jede Effektorstellung mehrdeutig, da die Effektororientierung durch mindestens zwei verschiedene Sechstupel von Werten für die Gelenkvariablen eingestellt werden kann (vgl. dazu Abschnitt 1.2.2). Durch die Einbeziehung des mechanisch zulässigen Bewegungsumfanges der einzelnen Gelenke wird die Lösung u.U. eindeutig.

• Eine vorgegebene Effektorstellung wird als *Reduktionsstellung* bezeichnet, wenn bei der zugrundeliegenden Roboterkonstruktion zum Erreichen dieser Stellung ein Getriebefreiheitsgrad $F < 6$ genügen würde. In dieser Situation können bestimmte Gelenkvariablen v_i beliebig gewählt werden, da mit Hilfe der restlichen Gelenke diese Effektorstellung trotzdem erreichbar ist. Die Rückwärtsrechnung reduziert sich nach der freien Festlegung von v_i auf die Berechnung der restlichen Gelenkvariablen.

• Effektorstellungen, die von einem nichtdegenerierten Roboter auch bei idealisierten Bewegungsmöglichkeiten der Gelenke ($t_i \in]-\infty,+\infty[$ bzw. $d_i \in [0°,360°[$) nicht

angesteuert werden können, werden Effektorstellung*unerreichbar*, Effektorstellungen, die nur wegen des begrenzten Bewegungsumfanges der Gelenke nicht anfahrbar sind, werden Effektorstellung*unzulässig* genannt. Unzulässig sind auch solche Roboterstellungen, bei denen ein Roboterelement, der Effektor oder ein mit dem Effektor verbundenes Objekt aus dem zulässigen Arbeitsraum herausragen (z.B. Kollision des Effektors mit dem eigenen Robotergehäuse oder mit im Arbeitsbereich befindlichen Hindernissen).
Unerreichbare Stellungen lassen sich bei der Berechnung der v_i erkennen. Wir kommen hierauf im nächsten Abschnitt zurück.
Unzulässige Stellungen fallen dagegen bei der mathematischen Berechnung der v_i nicht auf und müssen durch zusätzliche Algorithmen abgeprüft werden.

2.2.3 Vorüberlegungen zur expliziten Lösung der kinematischen Gleichung

Aus der Algebra ist bekannt, daß für allgemeine Polynome p in einer Unbekannten mit Grad $p \leq 4$ eine explizite Lösung existiert [Meyberg 75, Meyberg 76] und diese Lösung als geschlossene Formel angegeben werden kann. Die bei der Rückwärtsrechnung auftretenden transzendenten Gleichungen lassen sich in Polynome mit einer oder mehreren Unbekannten (Gelenkvariablen) umwandeln. Damit die kinematische Gleichung also überhaupt geschlossen gelöst werden kann, müssen wir Ansätze finden, die als Bestimmungsgleichungen Polynome p in *einer* noch nicht bestimmten Unbekannten mit Grad $p \leq 4$ liefern.

Aus Gründen der Praktikabilität beschränken wir uns vorerst auf solche Bestimmungsgleichungen, in denen nur Polynome in einer noch nicht bestimmten Unbekannten von Grad $p \leq 2$ auftreten. Die hieraus ableitbaren Lösungsformeln für die Gelenkvariablen sind übersichtlich und bezüglich der zu analysierenden Sonderfälle der lokalen Degeneration und unerreichbarer Effektorstellungen einfach handhabbar.

Bei der Untersuchung, für welche Roboterklassen mit diesem Ansatz geschlossene Lösungen gefunden werden können, wird sich zeigen, daß die überwiegende Mehrzahl aller heute am Markt befindlichen Roboter hierzu gehört.

Zuerst stellt sich die Frage, wie die in Sinus- und Cosinusfunktionen auftretenden Gelenkvariablen den Grad des Lösungspolynoms beeinflussen. Hierzu greifen wir auf die auch in der Integralrechnung benutzte Tangenssubstitution $x=\tan(d/2)$ zurück. Mit den Beziehungen

$$\sin(d) = 2\cdot\tan(d/2) / (1+\tan^2(d/2)) = 2\cdot x / (1+x^2) \quad \text{und}$$

$$\cos(d) = (1-\tan^2(d/2)) / (1+\tan^2(d/2)) = (1-x^2) / (1+x^2)$$

erhalten wir als Bestimmungsgleichungen Polynome in x. Offensichtlich ist jede Rotationsvariable d Anlaß für einen quadratischen Term in x. Dies bedeutet, daß eine explizite Lösung aus einem Polynom zweiten Grades nur dann existiert, wenn die transzendente Bestimmungsgleichung genau eine noch unbestimmte Rotationsvariable d enthält.

Im folgenden betrachten wir alle möglichen Formen transzendenter Bestimmungsgleichungen, die obiger Bedingung (nur eine Unbekannte) genügen und geben dazu die Lösung an.

Eindeutige Lösung:

Geg: $\sin(d_i)=a$ und $\cos(d_i)=b \;\Rightarrow\; d_i = \mathrm{ATAN2}(a,b)$

Mehrdeutige Lösungen:

a) Geg: $\sin(d_i)=a$ und es existiert keine Gleichung $\cos(d_i)=b$

Es gilt: $\cos(d_i) = \pm\sqrt{1-\sin^2(d_i)}$

$\Rightarrow\; d_{i1} = \mathrm{ATAN2}(a,+\sqrt{1-a^2});\quad d_{i2} = \mathrm{ATAN2}(a,-\sqrt{1-a^2})$

b) Geg: $\cos(d_i)=a$ und es existiert keine Gleichung $\sin(d_i)=b$

Es gilt: $\sin(d_i) = \pm\sqrt{1-\cos^2(d_i)}$

$\Rightarrow\; d_{i1} = \mathrm{ATAN2}(+\sqrt{1-a^2},a);\quad d_{i2} = \mathrm{ATAN2}(-\sqrt{1-a^2},a)$

c) Geg: $a\cdot\sin(d_i)-b\cdot\cos(d_i) = 0$ mit $a\neq0$, $b\neq0$

$$\text{Es gilt: } \frac{\sin(d_i)}{\cos(d_i)} = \frac{b}{a} = \frac{-b}{-a} \;\Rightarrow\; d_{i1} = \mathrm{ATAN2}(b,a);\quad d_{i2} = \mathrm{ATAN2}(-b,-a)$$

d) Geg: $a\cdot\sin(d_i)-b\cdot\cos(d_i) = c$ mit $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$

Mit der Substitution $a = r\cdot\cos(\varphi)$; $b = r\cdot\sin(\varphi)$; $r > 0$

gilt: $r=+\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \varphi = \mathrm{ATAN2}(b,a)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \cos(\varphi)\cdot\sin(d_i)-\sin(\varphi)\cdot\cos(d_i) &= c/r \\
\sin(d_i-\varphi) &= c/r \\
\cos(d_i-\varphi) &= \pm\sqrt{1-c^2/r^2}
\end{aligned}$$

$$d_{i1} = \mathrm{ATAN2}(c,+\sqrt{a^2+b^2-c^2}\ ) + \mathrm{ATAN2}(b,a)$$
$$d_{i2} = \mathrm{ATAN2}(c,-\sqrt{a^2+b^2-c^2}\ ) + \mathrm{ATAN2}(b,a)$$

Diese Bestimmungsgleichungen liefern Werte im Bereich $d_{ij} \in]-\pi,3\cdot\pi[$

Diskussion der Lösungen:

1. Falls ein Radikand negativ ist (möglich bei a), b), d)), liegt eine unerreichbare Zielvorgabe vor.

2. Die Fälle a), b) und c) sind Spezialfälle von Fall d). Bei der Durchführung der Berechnung hat dies jedoch einen unnötig hohen Rechenaufwand zur Folge.

3. Beim Auftreten mehrdeutiger Lösungen ist es empfehlenswert, zu prüfen, ob diese Mehrdeutigkeit aufgrund der Gelenkkonstruktion plausibel ist. Häufig werden geeignete Gleichungen übersehen, was die Ursache für falsche Ergebnisse ist.

   1. Beispiel: Die Gleichung $\sin(d_i)=a$ impliziert zwei Möglichkeiten

   a) Für d_i existieren wirklich zwei Lösungen.

   b) $\cos(d_i)=b$ wurde übersehen; damit ist eine der zwei berechneten Lösungen falsch.

   2. Beispiel: Die Gleichungen $\cos(d_i)-\sin(d_i)=0$ und $\cos(d_i)+\sin(d_i)=2a$ führen zu $\sin(d_i)=a$ und $\cos(d_i)=a$, d.h. es existiert eine eindeutige Lösung für d_i.
   Übersieht man die Existenz einer der beiden Gleichungen, so führt das zu falschen Ergebnissen.

4. In den Radikanden der Lösungsformeln stehen Ausdrücke, die Null werden können (Fall a, b und d). In diesen Fällen sind die Lösungen für d_{i1} und d_{i2} identisch. Fall c liefert immer zwei unterschiedliche Lösungen.

2.2.4 Auswahl nichtredundanter Bestimmungsgleichungen

Analyse der Anzahl nichtredundanter Bestimmungsgleichungen

Da die Mehrzahl der Verfahren zur expliziten Lösung Redundanz der kinematischen Gleichung auf der Basis homogener 4×4-Matrizen entwickelt wurden, wird diese Darstellungsform im folgenden verwendet.

Die kinematische Gleichung in Form einer homogene 4×4-Matrizengleichung liefert vier triviale Einzelgleichungen der Form 0=0 bzw. 1=1 und 12 nichttriviale Einzelgleichungen $f_{ij}(v_1,...,v_n)= \mathrm{Ziel}_{ij}$, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 4$, n = Anzahl der Gelenke.

Da die ersten drei Spalten dieser Matrizen die drei Einheitsvektoren x, y und z eines kartesischen Rechtskoordinatensystems beschreiben, unterliegen diese Matrixelemente den Orthonormalbedingungen:

$$\sum_{k=1}^{3} f_{ki} \cdot f_{kj} = \sum_{k=1}^{3} Ziel_{ki} \cdot Ziel_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i° j \\ 1 & \text{falls } i=j \end{cases} \quad 1 \text{ Š } i, j \text{ Š } 3$$

Aus dem einen Teil dieser Bedingung

$f_{1j}^2 + f_{2j}^2 + f_{3j}^2 = Ziel_{1j}^2 + Ziel_{2j}^2 + Ziel_{3j}^2 = 1$ für $1 \leq j \leq 3$

folgt, daß alle n-Tupel $(v_1,...,v_n)$ aus $\Re^n$ zur Lösungsmenge dieser Gleichung gehören.

L_i sei die Lösung für die Einzelgleichung $f_{ij}=Ziel_{ij}$ (bei festem j), $1 \leq i, j \leq 3$; k, l, m seien disjunkte Werte aus {1, 2, 3}; $L_{k,l}$ sei $L_k\Omega\varepsilon\gamma\varepsilon\nu\ \Lambda_m \supset L_{k,l+}$ (dies gilt, weil $f_{mj}=Ziel_{mj}$ für $L_{k,l+}$) bringt eine über die Aufspaltung von $L_{k,l}$ hinausgehende Bearbeitung der dritten Spaltengleichung $f_{mj}=Ziel_{mj}$ keine Einschränkung der Lösung $L_{k,l+}$ und damit auch keine Erkenntnis über die noch gesuchten Variablen. Die Aufspaltung von $L_{k,l}$ trennt somit nur die für die kinematische Gleichung korrekten Lösungen $L_{k,l+}$ (mit $f_{mj}=Ziel_{mj}$) von den fehlerhaften Lösungen $L_{k,l-}$, für die wegen $f_{mj}=-Ziel_{mj}$ ein Element der j-ten Spalte zur Ungleichheit "$\prod(\mathbf{Z}_i \bullet \mathbf{X}_{i+1}) \bullet \mathbf{TR} \neq \mathbf{Ziel}$" führt. Auf diese Weisen haben wir die ersten drei redundanten Bestimmungsgleichungen ausgesondert.

Analog zur obigen Beweisführung scheidet wegen des anderen Teils der Orthonormalbedingung

$$\sum_{k=1}^{3} f_{ki} \cdot f_{kj} = \sum_{k=1}^{3} Ziel_{ki} \cdot Ziel_{kj} = 0 \quad 1 \text{ Š } i , j \text{ Š } 3 \quad i < j$$

jeweils eine Matrixgleichung $f_{ij}=Ziel_{ij}$ für die Bestimmung der gesuchten Variablen aus, sodaß neben den drei Positionsgleichungen von den neun existierenden Orientierungsgleichungen nur drei zur Bestimmung der Variablen d_i verwendet werden können.

Dieses Ergebnis deckt sich mit der in Kapitel 1.1 gemachten Aussage, daß ein im Raum frei beweglicher Körper den Freiheitsgrad f=6 besitzt, und zeigt, daß aus der kinematischen kinematischeGleichung (in welcher Darstellungsform auch immer) maximal sechs Gelenkvariable bestimmt werden können.

Daher können bei einem Roboter mit einem Getriebefreiheitsgrad F, der größer ist als der Freiheitsgrad f des Roboters, f Variable v_i aus der kinematischen Gleichung berechnet werden. Die Bestimmung der restlichen F-f Variablen muß mit Hilfe aufgabenspezifischer Kriterien durchgeführt werden.

Auswahl der Bestimmungsgleichung

Ebenfalls auf die Orthonormalbedingungen wird die Beweisführung für den folgenden Satz über die homogenen 4×4-Matrix **M** zurückgeführt:

Sind die Elemente M_{14}, M_{24}, M_{34}, M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{23} und M_{13} einer homogenen 4×4-Matrix **M** bekannt und gilt $|M_{33}|\neq 1$, dann sind die restlichen 4 nichttrivialen Elemente M_{11}, M_{12}, M_{21} und M_{22} eindeutig bestimmt durch:

$$M_{11} = (-M_{31}\cdot M_{33}\cdot M_{13} - M_{32}\cdot M_{23}) / (1-M_{33}^2)$$

$$M_{12} = (-M_{32}\cdot M_{33}\cdot M_{13} + M_{31}\cdot M_{23}) / ((1-M_{33}^2)$$

$$M_{21} = (-M_{31}\cdot M_{33}\cdot M_{23} + M_{32}\cdot M_{13}) / (1-M_{33}^2)$$

$$M_{22} = (-M_{32}\cdot M_{33}\cdot M_{23} - M_{31}\cdot M_{13}) / (1-M_{33}^2)$$

Beweis

Wegen $|M_{33}|\neq 1$ ist $M_{13}\neq 0$ oder $M_{23}\neq 0$. Sei $M_{13}\neq 0$:

Mit der Orthogonalitätsbedingung $M_{12}\cdot M_{13}+M_{22}\cdot M_{23}+M_{32}\cdot M_{33}=0$ ergibt sich

$M_{12} = (-M_{22}\cdot M_{23} - M_{32}\cdot M_{33}) / M_{13}$.

Aus $M_{12}^2+M_{22}^2+M_{32}^2=1$ folgt nach Einsetzen von M_{12} und Anwendung der quadratischen Lösungsformel unter Verwendung der Gleichungen

$M_{31}^2+M_{32}^2+M_{33}^2=1$ und $M_{13}^2+M_{23}^2+M_{33}^2=1$:

$M_{22} = (-M_{32}\cdot M_{33}\cdot M_{23} \pm M_{31}\cdot M_{13}) / (1-M_{33}^2)$

Da die Matrix **M** ein Rechtskoordinatensystem beschreibt, muß mit **x**=**y**×**z** gelten:

$M_{31} = M_{12}\cdot M_{23} - M_{22}\cdot M_{13}$

Diese Gleichung ist nur für die "-"-Variante in M_{22} erfüllbar!

Einsetzen von M_{22} in M_{12} und Anwenden der Gleichung $M_{13}^2+M_{23}^2+M_{33}^2=1$ bringt M_{12} in die gewünschte Form.

Auf gleiche Weise werden M_{21} und M_{11} unter Verwendung von $M_{11}^2+M_{21}^2+M_{31}^2=1$ und **y**=**z**×**x** hergeleitet.

Für $M_{13}=0$ und $M_{23}\neq 0$ verläuft der Beweis analog!

Dieser Satz ist notwendig zum Nachweis, daß *alle* Einzelgleichungen der kinematischen Matrixgleichung korrekt erfüllt sind, auch wenn zur Bestimmung der Lösung nur die oben genannte Teilmenge von Einzelgleichungen benutzt wurde. Die Auswahl der fünf Elemente M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{23} und M_{13} aus dem 3×3-Orientierungsteil der Matrix **M** ist dabei eine von mehreren Möglichkeiten. Allerdings erweist sich diese Wahl der dritten Zeile und der dritten Spalte (z-Zeile und z-Spalte) im Zusammenhang mit den Denavit-Hartenberg-Regeln für die Rückwärtsrechnung als besonders günstig, weil die z-Achse des Gelenksystems S_i die Bewegungsachse des jeweiligen Gelenks darstellt. Den Vorteil dieser Wahl werden wir im nächsten Kapitel noch deutlich feststellen können.