1.2.7 Operationen auf dualen Quaternionen

Wie in Abschnitt 1.1.4 erläutert, kann durch eine duale Quaternion eine Drehung und eine Schiebung bezüglich ein und derselben Achse dargestellt werden. Da für die Roboterkinematik nur längen- und winkeltreue Abbildungen interessieren und zusätzliche Abbildungseigenschaften wie Streckung und Verzerrung für dieses Anwendungsgebiet nicht benötigt werden, wird die weitere Betrachtung auf eine Untermenge der dualen Quaternionen beschränkt. Dazu wird eine *Norm* N(**DQ**) Normfür duale Quaternionen **DQ** = (d_1 , d_2 , d_3 , d_4) definiert durch

$$N(\mathbf{DQ}) = \sum_{i=1}^{4} d_i^2.$$

und die Menge der Einheitsquaternionen ausgezeichnet.

Eine Dualquaternion **DQ** mit N(**DQ**) = $1+\varepsilon\cdot 0$ heißt *Einheitsq* und kann immer in die Form **DQ** = ($\cos(D\varphi)$, $\sin(D\varphi)\cdot n_1$, $\sin(D\varphi)\cdot n_2$, $\sin(D\varphi)\cdot n_3$) mit $(n_1 , n_2 , n_3)^T$ als dualer Einheitsgeraden umgeschrieben werden. Daß für die duale - Gerade $(n_1 , n_2 , n_3)^T$ immer Werte existieren, so daß $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1+\varepsilon\cdot 0$ (Einheitsgerade) gilt, folgt unmittelbar aus N(**DQ**) = 1 und $\cos^2(D\varphi) + \sin^2(D\varphi) = 1$. Mit obiger Definition einer dualen Einheitsgeraden garantiert die Bedingung N(**DQ**) = $1+\varepsilon\cdot 0$ sowohl die Normiertheit des Richtungsvektors (Primärteil) als auch die Orthogonalität zwischen Richtungsvektor und Momentenvektor im Sekundärteil der Geraden und fügt sich somit nahtlos in die bisher verwendete Darstellung von Raumgeraden ein.

Im Gegensatz zum sechsdimensionalen Beschreibungsvektor kann für duale Quaternionen eine sinnvolle Verknüpfungsoperation definiert werden; allerdings handelt es sich hierbei um eine sehr komplexe Verknüpfungsvorschrift.

Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen

Zwei Dualquaternionen $\mathbf{DQ}_a$ = (d_{1a} , d_{2a} , d_{3a} , d_{4a}) und $\mathbf{DQ}_b$ = (d_{1b} , d_{2b} , d_{3b} , d_{4b}) werden nach folgenden Regeln miteinander verknüpft:

$$\mathbf{DQ}_a+\mathbf{DQ}_b = (\, d_{1a} + d_{1b} , d_{2a} + d_{2b} , d_{3a} + d_{3b} , d_{4a} + d_{4b} \,)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{DQ}_a\bullet\mathbf{DQ}_b = (\, & d_{1a}\cdot d_{1b} - (d_{2a}, d_{3a}, d_{4a})\bullet(d_{2b}, d_{3b}, d_{4b})^T , \\
& d_{1a}\cdot(d_{2b}, d_{3b}, d_{4b}) + d_{1b}\cdot(d_{2a}, d_{3a}, d_{4a}) + (d_{2a}, d_{3a}, d_{4a})\times(d_{2b}, d_{3b}, d_{4b}) \,) \\
= (\, & d_{1a}\cdot d_{1b} - d_{2a}\cdot d_{2b} - d_{3a}\cdot d_{3b} - d_{4a}\cdot d_{4b} , \\
& d_{1a}\cdot d_{2b} + d_{1b}\cdot d_{2a} + d_{3a}\cdot d_{4b} - d_{4a}\cdot d_{3b} , \\
& d_{1a}\cdot d_{3b} + d_{1b}\cdot d_{3a} + d_{4a}\cdot d_{2b} - d_{2a}\cdot d_{4b} , \\
& d_{1a}\cdot d_{4b} + d_{1b}\cdot d_{4a} + d_{2a}\cdot d_{3b} - d_{3a}\cdot d_{2b} \,)
\end{aligned}$$

Duale Quaternionen bilden einen Ring **DQ**(+,•); die Menge der dualen Einheitsquaternionen ist bezüglich der Multiplikation wegen N(**DQ**$_1$**•DQ**$_2$)=N(**DQ**$_1$)•N(**DQ**$_2$) abgeschlossen und somit eine Untergruppe von **DQ**. Die multiplikative Verknüpfung von Dualquaternionen beschreibt – von links nach rechts gelesen – die Hintereinanderausführung mehrerer Drehungen und Schiebungen, jeweils bezogen auf das zuletzt bewegte Objektkoordinatensystem. Details zur Verknüpfungsvorschrift von Dualquaternionen finden sich in [Glavina 85].

Koordinatent von freien Vektoren und GTransformation einer Raumgeraden

Eine duale - Zahl d läßt sich als Dualquaternion (d, 0, 0, 0) darstellen. Definiert man die zu **DQ** *konjugierte* K(**DQ**) durch Vorzeichenwechsel der letzten drei dualen Zahlen

K(**DQ**) = (d_1 ,-d_2 ,-d_3 ,-d_4),

dann ergibt sich die Norm N(**DQ**) - dargestellt als duale Zahl in Quaternionenstruktur – durch N(**DQ**) = **DQ•**K(**DQ**) = K(**DQ**)**•DQ**, wobei N(**DQ**) von der Form (d, 0, 0, 0) ist.

Da 1 - als Quaternion (1, 0, 0, 0) verstanden - das neutrale Element der Quaternionen-multiplikation darstellt, ergibt sich für Einheitsquaternionen (mit N(**DQ**)=1) aus obiger Gleichung die Standarddefinition für inverse Elemente:

1 = **DQ•**K(**DQ**) = K(**DQ**)•DQ

Die zur Einheitsquaternion **DQ** iInverse einer Quaternion **DQ**$^{-1}$ kann daher durch Konjugation bestimmt werden:

DQ^{-1} = K(**DQ**)   falls N(**DQ**)=1

So wie die dualen Zahlen als Untermenge (d, 0, 0, 0) der Dualquaternionen aufgefaßt werden können, lassen sich Raumgeraden – bisher beschrieben durch einen dualenduale-r Vektor (dg_1 , dg_2 , dg_3)^T – als Teilmenge G = { **g** | **g** = (0 , dg_1 , dg_2 , dg_3)} der Dual-quaternionen darstellen.

Die auf Einheitsquaternionen beschränkte Transformationsvorschrift "**g**' = **DQ•g•**K(**DQ**)" (=**DQ•g•DQ**$^{-1}$) bildet die Raumgerade **g** in die Raumgerade **g**' ab. In der Quaternionen-darstellung **DQ**=(cos(Dφ), sin(Dφ)·n_1, sin(Dφ)·n_2, sin(Dφ)·n_3) beschreibt dabei (n_1, n_2, n_3)^T die Einheitsgerade im Raum, um die gedreht und entlang der geschoben wird, und Dφ = p + ε·s gibt den *halben Winkel* p und die *halbe Strecke* s an, um die durch die Einheitsquaternion **DQ** bewegt wurde. Der Beweis für diese Aussagen befindet sich in [Glavina 85].

Die Transformation eines freien Vektors kann in die Behandlung von Raumgeraden eingebettet werden; da für freie Vektoren lediglich die Orientierungsinformation, nicht aber die Position von Bedeutung ist, genügt der Unterring **Q**(+,•) der reellen Quaternionen. Ein Vektor **v**=(v_x, v_y, v_z) wird zur reellen Quaternion (0, v_x, v_y, v_z) erweitert und durch die

Abbildungsvorschrift "**v**' = **Qp•v•**K(**Qp**)" entsprechend der dualen Quaternion **DQ** = **Qp** + ε·**Qs** transformiert.

KoordinatentTransformation von Punktkoordinaten

Eine sogenannte "*Epsilon-Konjugation*" ist durch Vorzeichenwechsel in den Sekundärwerten einer Dualquaternion definiert:

E(**DQ**) = $(dp_1 - \varepsilon \cdot ds_1 , dp_2 - \varepsilon \cdot ds_2 , dp_3 - \varepsilon \cdot ds_3 , dp_4 - \varepsilon \cdot ds_4)$.

Ein Punkt mit den Koordinaten P = (x_1 , x_2 , x_3) wird durch eine duale Einheitsquaternion **DQ** nach folgendem Verfahren in den neuen Raumpunkt P' transformiert:

Dualquaternion **DX**:= $(1 , \varepsilon \cdot x_1 , \varepsilon \cdot x_2 , \varepsilon \cdot x_3)$

DX':= **DQ•DX•**K(E(**DQ**)) = $(1 , \varepsilon \cdot x_1', \varepsilon \cdot x_2', \varepsilon \cdot x_3')$

Aus **DX**' können die Koordinaten des neuen Punktes P' = (x_1', x_2', x_3') abgelesen werden. Ein Beweis, daß die oben definierte Abbildung die gewünschte Bewegung (Rotation 2p und Translation 2s um $(n_1 , n_2 , n_3)^T$) realisiert, findet sich in [Blaschke 60].

1.2.8 Umrechnung homogener 4×4-Matrizen in duale Quaternionen

Die Transformation einer homogenen 4×4-Matrix **H** Transformationeiner homogenen 4×4-Matrix in eine Dualquaternion **DQ** wollen wir hier über die Verwendung von Eulerwinkel zur Angabe der Orientierung durchführen; ein "direktes" Verfahren, bei dem aus dem 3×3-Orientierungsteil **RS** der Matrix **H** die Rotationsachse $(n_1 , n_2 , n_3)^T$ und der Winkel φ bestimmt werden, ist in [Paul 81a] erläutert; vor diese reelle Rotationsquaternion muß dann noch die aus $(H_{14} , H_{24} , H_{34})^T$ resultierende duale Translationsquaternion multipliziert werden.

Der in Abschnitt 1.2.2 vorgestellte Ansatz **Rx**(W2)•**Rz**(W3) = **Rz**$(W1)^{-1}$•**RS** liefert die Gleichungen

1.3: $0 = \cos(W1) \cdot H_{13} + \sin(W1) \cdot H_{23}$
2.3: $-\sin(W2) = -\sin(W1) \cdot H_{13} + \cos(W1) \cdot H_{23}$
3.3: $\cos(W2) = H_{33}$
1.2: $-\sin(W3) = \cos(W1) \cdot H_{12} + \sin(W1) \cdot H_{22}$
1.1: $\cos(W3) = \cos(W1) \cdot H_{11} + \sin(W1) \cdot H_{21}$.

Die Eulerwinkel W1, W2 und W3 ergeben sich damit zu

$W1 = \mathrm{ATAN2}(H_{13} , -H_{23})$ bzw. $W1 = 0$ (willkürlich) falls $H_{13}=0$ und $H_{23}=0$

$W2 = \mathrm{ATAN2}(\sin(W1) \cdot H_{13} - \cos(W1) \cdot H_{23} , H_{33})$

$$W3 = ATAN2(-\cos(W1)\cdot H_{12} - \sin(W1)\cdot H_{22}\ ,\ \cos(W1)\cdot H_{11} + \sin(W1)\cdot H_{21})$$

Mit $\varphi_1 := \frac{W1}{2}$, $\varphi_2 := \frac{W2}{2}$, $\varphi_3 := \frac{W3}{2}$ und $d := \sqrt{H_{14}{}^2 + H_{24}{}^2 + H_{34}{}^2}$ (Länge des Translationsvektors) lassen sich die Translation und die einzelnen Rotationen Wi beschreiben durch das Quaternionenprodukt

$$\begin{aligned}&(\cos(\varepsilon\cdot d/2)\ ,\ \sin(\varepsilon\cdot d/2)\cdot H_{14}/d\ ,\ \sin(\varepsilon\cdot d/2)\cdot H_{24}/d\ ,\ \sin(\varepsilon\cdot d/2)\cdot H_{34}/d) \bullet\\ &(\cos(\varphi_1)\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \sin(\varphi_1)) \bullet (\cos(\varphi_2)\ ,\ \sin(\varphi_2)\ ,\ 0\ ,\ 0) \bullet (\cos(\varphi_3)\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \sin(\varphi_3))\end{aligned}$$

Die Lösung für die gesuchte Quaternion **DQ** lautet also:

$$\begin{aligned}&(1\ ,\ \varepsilon\cdot H_{14}/2\ ,\ \varepsilon\cdot H_{24}/2\ ,\ \varepsilon\cdot H_{34}/2) \bullet\\ &(\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\varphi_3) - \sin(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\varphi_3)\ ,\\ &\ \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)\cdot\cos(\varphi_3) + \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)\cdot\sin(\varphi_3)\ ,\\ &\ \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)\cdot\cos(\varphi_3) - \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)\cdot\sin(\varphi_3)\ ,\\ &\ \sin(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\varphi_3) + \cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\varphi_3)\ )\end{aligned}$$

1.2.9 Umrechnung dualer Quaternionen in homogene 4×4-Matrizen

Für die Umrechnung einer Dualquaternion **DQ**Transformationeiner Dualquaternion in eine homogene 4×4-Matrix **H** greifen wir auf die im Abschnitt 1.2.7 definierten Transformationsvorschriften für Raumgeraden, freien Vektoren und Punkte zurück und bilden die Orientierungsvektoren **x**, **y** und **z** des Bezugsystems mittels der Quaternion **DQ** in die zugehörigen stellungsbeschreibenden Achsvektoren ab. Die ebenfalls definierte Punkttransformation des Ursprungs liefert dann die noch ausstehende Information über die 4. Spalte der Matrix **H**. Da für die ersten drei Spalten von **H** nur die Orientierung ausschlaggebend ist, kann sich dort die Berechnung auf den Primärteil **Qp** der Quaternion **DQ** beschränken (vgl. Bemerkung zur Transformation freier Vektoren).

Es gilt:

$$(0\ ,\ H_{11}\ ,\ H_{21}\ ,\ H_{31}) = (dp_1\ ,\ dp_2\ ,\ dp_3\ ,\ dp_4)\bullet(0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0)\bullet(dp_1\ ,-dp_2\ ,-dp_3\ ,-dp_4)$$

$$(0\ ,\ H_{12}\ ,\ H_{22}\ ,\ H_{32}) = (dp_1\ ,\ dp_2\ ,\ dp_3\ ,\ dp_4)\bullet(0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0)\bullet(dp_1\ ,-dp_2\ ,-dp_3\ ,-dp_4)$$

$$(0\ ,\ H_{13}\ ,\ H_{23}\ ,\ H_{33}) = (dp_1\ ,\ dp_2\ ,\ dp_3\ ,\ dp_4)\bullet(0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1)\bullet(dp_1\ ,-dp_2\ ,-dp_3\ ,-dp_4)$$

$$\begin{aligned}(1\ ,\ \varepsilon\cdot H_{14}\ ,\ \varepsilon\cdot H_{24}\ ,\ \varepsilon\cdot H_{34}) = (d_1\ ,\ d_2\ ,\ d_3\ ,\ d_4)\bullet(1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0)\bullet&\\ (dp_1-\varepsilon\cdot ds_1\ ,-dp_2+\varepsilon\cdot ds_2\ ,-dp_3+\varepsilon\cdot ds_3\ ,-dp_4+\varepsilon\cdot ds_4)&\end{aligned}$$

$$(H_{41}\ ,\ H_{42}\ ,\ H_{43}\ ,\ H_{44}) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

Liegt die Quaternion **DQ** in der Form **DQ** = $(\cos(\varphi+\varepsilon\cdot d), \sin(\varphi+\varepsilon\cdot d)\cdot(n_1+\varepsilon\cdot m_1\ ,\ n_2+\varepsilon\cdot m_2\ ,\ n_3+\varepsilon\cdot m_3)\ )$ vor, so lautet die homogene 4×4-Matrix **H** [Paul 81a, Rooney 78, Glavina 85]:

$H_{11} = n_1^2 \cdot (1-\cos(2\varphi)) + \cos(2\varphi)$

$H_{12} = n_2 \cdot n_1 \cdot (1-\cos(2\varphi)) - n_3 \cdot \sin(2\varphi)$

$H_{13} = n_3 \cdot n_1 \cdot (1-\cos(2\varphi)) + n_2 \cdot \sin(2\varphi)$

$H_{21} = n_1 \cdot n_2 \cdot (1-\cos(2\varphi)) + n_3 \cdot \sin(2\varphi)$

$H_{22} = n_2^2 \cdot (1-\cos(2\varphi)) + \cos(2\varphi)$

$H_{23} = n_3 \cdot n_2 \cdot (1-\cos(2\varphi)) - n_1 \cdot \sin(2\varphi)$

$H_{31} = n_1 \cdot n_3 \cdot (1-\cos(2\varphi)) - n_2 \cdot \sin(2\varphi)$

$H_{32} = n_2 \cdot n_3 \cdot (1-\cos(2\varphi)) + n_1 \cdot \sin(2\varphi)$

$H_{33} = n_3^2 \cdot (1-\cos(2\varphi)) + \cos(2\varphi)$

$H_{14} = n_1 \cdot 2 \cdot d + m_1 \cdot \sin(2\varphi) + (n_2 \cdot m_3 - n_3 \cdot m_2) \cdot (1-\cos(2\varphi))$

$H_{24} = n_2 \cdot 2 \cdot d + m_2 \cdot \sin(2\varphi) + (n_3 \cdot m_1 - n_1 \cdot m_3) \cdot (1-\cos(2\varphi))$

$H_{34} = n_3 \cdot 2 \cdot d + m_3 \cdot \sin(2\varphi) + (n_1 \cdot m_2 - n_2 \cdot m_1) \cdot (1-\cos(2\varphi))$

$H_{41} = 0$

$H_{42} = 0$

$H_{43} = 0$

$H_{44} = 1$

In völliger Analogie zur homogenen 4×4- läßt sich aus der Dualquaternion **DQ** die zugehörige 3×3-Dualmatrix **D** ermitteln:

$(0 , D_{11} , D_{21} , D_{31}) = \mathbf{DQ} \bullet (0 , 1 , 0 , 0) \bullet K(\mathbf{DQ})$

$(0 , D_{12} , D_{22} , D_{32}) = \mathbf{DQ} \bullet (0 , 0 , 1 , 0) \bullet K(\mathbf{DQ})$

$(0 , D_{13} , D_{23} , D_{33}) = \mathbf{DQ} \bullet (0 , 0 , 0 , 1) \bullet K(\mathbf{DQ})$

Der Einsatz von Dualquaternionen zur Stellungsbeschreibung eines Objekts und die Verfahren zur Transformation in äquivalente Darstellungsformen werden im folgenden an dem in Abb. 1.8 illustrierten Beispiel demonstriert.

Die Stellung des Objekts ergibt sich durch eine 90°-Drehung um die zur y-Achse parallele, durch den Punkt $(0 , 0 , 3)^T$ laufende Achse $(0-\varepsilon \cdot 3 , 1 , 0)^T$ und eine Schiebung um 4 Einheiten entlang dieser Achse.

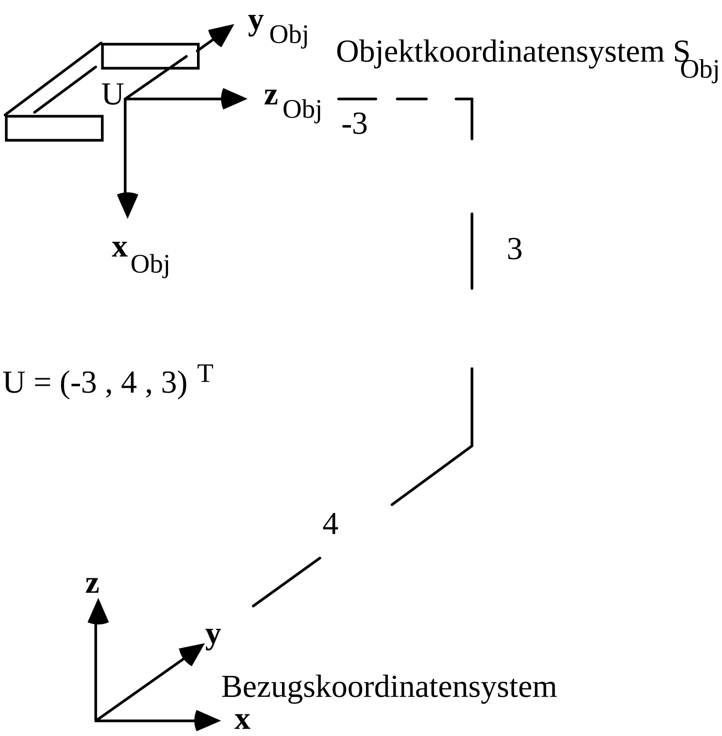
$$\mathbf{S}_{Obj} = (\cos(90°/2+\varepsilon\cdot 4/2)\ ,\ \sin(90°/2+\varepsilon\cdot 4/2)\cdot(0-\varepsilon\cdot 3\ ,\ 1\ ,\ 0))$$

$$= (\cos(90°/2)-\varepsilon\cdot 4/2\cdot\sin(90°/2)\ ,\ (\sin(90°/2)+\varepsilon\cdot 4/2\cdot\cos(90°/2))\cdot(0-\varepsilon\cdot 3\ ,\ 1\ ,\ 0))$$

$$= (\sqrt{2}/2-\varepsilon\sqrt{2}\ ,\ -\varepsilon\cdot 3\sqrt{2}/2\ ,\ \sqrt{2}/2+\varepsilon\sqrt{2}\ ,\ 0)$$

Das Umrechnen der Quaternion $\mathbf{S}_{Obj}=(\cos(90°/2+\varepsilon\cdot 4/2)\ ,\ \sin(90°/2+\varepsilon\cdot 4/2)\cdot(0-\varepsilon\cdot 3\ ,\ 1\ ,\ 0))$ in eine homogene 4×4-Matrix führt unter Berücksichtigung von $U=(u_x, u_y, u_z) = (-3, 4, 3)$ direkt zu der in Bild 1.2 enthaltenen Stellungsbeschreibung. Dies zeigt, daß die in Bild 1.1, Bild 1.2, Bild 1.4 und Bild 1.8 beschriebenen Stellungen unter der Voraussetzung $U = (-3, 4, 3)^T$ identisch sind. Damit kann die oben angegebene Dualquaternion $\mathbf{S}_{Obj}$ auch durch eine Transformation der Beschreibungswerte aus Bild 1.1 bzw. Bild 1.2 gewonnen werden. Entsprechend dem von uns beschriebenen Transformationsverfahren wird aus der in Bild 1.2 enthaltenen homogenen Matrix die zugehörige Eulerdarstellung ermittelt:

$$(-3, 4, 3, 90°, 90°,-90°).$$



$\mathbf{S}_{Obj} = (\cos(90°/2+\varepsilon\cdot 4/2)\ ,\ \sin(90°/2+\varepsilon\cdot 4/2)\cdot(0-\varepsilon\cdot 3\ ,\ 1\ ,\ 0))$

Abb. 1.8: Darstellung des Objektkoordinatensystems S_{Obj} durch eine duale Quaternion

Ausgehend von diesen Werten erhalten wir nach Aufspaltung der dualen trigonometrischen Funktionen in der Verschiebungsquaternion das Quaternionenprodukt

$$(1\ ,\ -\varepsilon\cdot\frac{3}{2}\ ,\ \varepsilon\cdot 2\ ,\ \varepsilon\cdot\frac{3}{2}) \bullet (\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}) \bullet (\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0\ ,\ 0) \bullet (\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (1\ ,\ -\varepsilon\cdot\frac{3}{2}\ ,\ \varepsilon\cdot 2\ ,\ \varepsilon\cdot\frac{3}{2}) \bullet (\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0)$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon\cdot\sqrt{2}\ ,\ -\varepsilon\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\cdot\sqrt{2}\ ,\ 0).$$