Robotik

ROBOTER-KINEMATIK

Forschungsbericht 1990-15

Günter Hommel
Hermann Heiß

Prof. Dr.-Ing. Günter Hommel

Fachgebiet PDV und Robotik

Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik

Technische Universität Berlin

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Robotermathematik

1.1 Beschreibung von Objektstellungen

Die räumliche Stellung eines Objekts, z.B. auch des Effektors, wird durch die Definition von zwei Koordinatensystemen und die geometrischen Beziehungen zwischen beiden beschrieben:

1. Das *objektspezifische* charakterisiert das zu handhabende Objekt und wird mit diesem mitbewegt; in der Geometrie wird deshalb häufig vom *Gangsystem* gesprochen. Koordinatenursprung und Richtung der Achsen werden entsprechend der Objektgeometrie und Aufgabenstellung vom Anwender sinnvoll festgelegt und können sich z.B. am Schwerpunkt, an Symmetrieachsen oder bestimmten ausgezeichneten Objektpunkten, -kanten oder -flächen orientieren.

2. Das *Bezugskoordinatensystem* beschreibt das die Objekte umgebende System; da dieses System in der Regel fest ist (zumindest hinsichtlich der Relativbewegung der ihm zugeordneten Objekte), wird es in der Geometrie auch als *Rastsystem* bezeichnet. Koordinatenursprung und Richtung der Achsen sind entsprechend der Aufgabenstellung bzw. Umwelt wählbar (in der Literatur deshalb oft auch *Weltkoordinatensystem* genannt) und können z. B. durch Fertigungseinrichtungen, Handhabungseinrichtungen oder Gebäude vorgegeben werden.

Beide Koordinatensysteme sind i.a. kartesische Rechtssysteme; in besonderen Anwendungsfällen können auch andere orthogonale Koordinatensysteme benutzt werden (z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinatensystem), deren Koordinaten aber immer in die Koordinaten eines kartesischen Hilfskoordinatensystems transformiert werden können. Wir beschränken uns deshalb im weiteren auf das am häufigsten verwendete kartesische Rechtskoordinatensystem.

Die *Orientierung* eines Objekts ist die Winkelbeziehung zwischen den Achsen des objektspezifischen Koordinatensystems und denen des Bezugskoordinatensystems.

Die *Position* eines Objekts ist der Ort, den ein bestimmter Punkt des Objekts – in der Regel der Ursprung des objektspezifischen Koordinatensystems – im Bezugskoordinatensystem einnimmt.

Die *Stellung* (=räumliche Stellung) eines Objekts wird durch die Position und die Orientierung im vorgegebenen Bezugskoordinatensystem definiert.

Der *Freiheitsgrad f* ist die Anzahl der möglichen unabhängigen Bewegungen (Translationen, Rotationen) eines Objekts gegenüber einem Bezugskoordinatensystem. Demnach hat ein im Raum frei bewegliches Objekt den Freiheitsgrad f=6, der sich – bei einem kartesischen Bezugskoordinatensystem – aus drei translatorischen Bewegungsmöglichkeiten (Verschiebungen) zur Festlegung der Position und drei rotatorischen Bewegungsmöglichkeiten (Drehungen) zur Festlegung der Orientierung zusammensetzt. Der Freiheitsgrad f=6 ist nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Voraussetzung, damit ein Objekt eine beliebige vorgegebene Stellung im Bezugskoordinatensystem einnehmen kann.

Die Anzahl der *Bewegungsachsen* eines Roboters (*Getriebefreiheitsgrad F*) ist nicht gleichzusetzen mit der Anzahl der Freiheitsgrade.

> Beispiel: Ein Industrieroboter mit acht Achsen (drei translatorische und fünf rotatorische) besitzt trotzdem nur den Freiheitsgrad f=6; der Vorteil der größeren Achsenzahl liegt in der erhöhten Flexibilität, die z.B. bei Montagearbeiten sinnvoll sein kann. Ein Problem ergibt sich beim Anfahren einer vorgegebenen Stellung aus der Mehrdeutigkeit der Gelenkstellungen, die eine aufgabenspezifische Festlegung notwendig macht.

Auch bei einer Achsenzahl $F \leq 6$ kann gelten: Achsenzahl > Freiheitsgrad. Die Vor- und Nachteile einer solchen Konstellation sind die gleichen wie im obigen Beispiel; zusätzlich jedoch erlaubt eine solche Konstruktion nicht, daß der Effektor jede beliebige Stellung im Raum einnehmen kann, was bei vielen Handhabungsaufgaben ein schwerwiegender Mangel sein dürfte.

> Beispiel: Eine automatische Teleskopantenne besitzt den Freiheitsgrad f=1, aber mehrere (nicht unabhängige) translatorische Bewegungsachsen.

Es gilt: Ein Roboter mit dem Freiheitsgrad f benötigt mindestens f (geeignet angeordnete) Bewegungsachsen. Falls $f > 3$, so sind mindestens f-3 Bewegungsachsen Rotationsgelenke.

Die geometrische Beziehung zwischen dem objektspezifischen Koordinatensystem und dem Bezugskoordinatensystem kann mathematisch unterschiedlich dargestellt werden. Um reelle Zahlen, Vektoren , zen und Quaternionen auch optisch voneinander abgrenzen zu können, werden Vektoren mit kleinen Buchstaben in Fettdruck und Matrizen bzw. Quaternionen mit fettgedruckten Großbuchstaben bezeichnet.

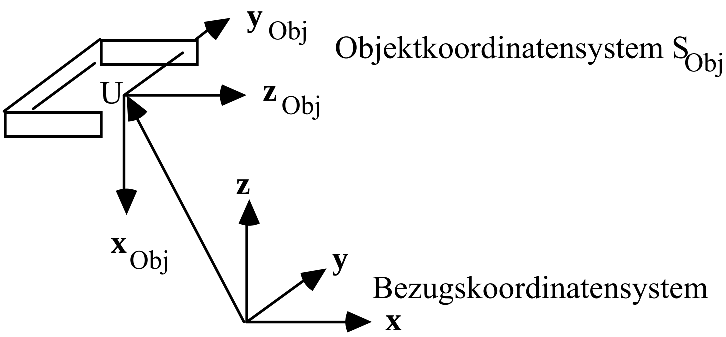
1.1.1 Sechsdimensionale Beschreibungsvektoren

Der sechsdimensionale (x,y,z,W1,W2,W3) gibt den Ursprung des Objektkoordinatensystems als Raumpunkt (x,y,z) im Bezugskoordinatensystem und die zur Beschreibung der Objektorientierung nötigen Drehwinkel W1, W2 und W3 an.

Die Winkel W1, W2 und W3 können sich auf unterschiedliche Rotationsachsen beziehen. Am weitesten verbreitet sind die beiden folgenden Definitionen:

Als *Eulerwinkel* werden die Winkel dann bezeichnet, wenn W1 die Drehung um die z-Achse des Bezugsystems, W2 die Drehung um die durch W1 *veränderte* x-Achse des Bezugsystems und der Winkel W3 die Drehung um die inzwischen durch W2 *veränderte* z-Achse beschreiben. Es gibt in der Literatur jedoch auch abweichende Definitionen der Eulerwinkel [Rooney 77]; häufig findet sich zum Beispiel eine Definition, in der als zweite Drehachse die *veränderte* y-Achse benutzt wird [Paul 81a].

Mit "*Yaw–Pitch–Roll*" (Gieren–Stampfen–Rollen) werden die Winkel dann bezeichnet, wenn W1=Yaw die Drehung um die z-Achse, W2=Pitch die Drehung um die y-Achse und W3=Roll die Drehung um die x-Achse darstellt, wobei die Drehachsen immer die festliegenden Achsen des Bezugsystems sind. Auch hierfür finden sich abweichende Definitionen in der Literatur, die aber alle als gleichwertig betrachtet werden können.



Eulerwinkel: (u_x , u_y , u_z , 90°, 90°, -90°)
Yaw–Pitch–Roll: (u_x , u_y , u_z , 0°, 90°, 0°)

Abb. 1.1: Beschreibung der Objektstellung durch sechsdimensionale Beschreibungsvektoren

Da der Freiheitsgrad f=6 gerade durch drei Translationen und drei Rotationen definiert ist, sehen wir, daß diese Art der Stellungsbeschreibung die kompakteste Form darstellt. Insofern ist sie bei der Beschreibung von Objektstellungen durch den Anwender benutzerfreundlich. Allerdings sind auf dieser mathematischen Struktur keine Operationen definiert, die eine Verknüpfung von Stellungen ermöglichen. Hierzu muß die Information des sechsdimensionalen Beschreibungsvektors in eine der nachfolgenden Darstellungsformen transformiert werden. Die Umrechnungsverfahren hierfür werden in Abschnitt 1.2 beschrieben.

1.1.2 Homogene Koordinaten und homogene 4×4-Matrizen

Neben dem sechsdimensionalen Beschreibungsvektor (x,y,z,W1,W2,W3), der sich für die Objektstellungen durch den Anwender als Standard herauskristallisiert hat, haben sich die *homogenen* homogene- *Koordinaten* für die Weiterverarbeitung dieser Daten durchgesetzt. Weiterverarbeitung umfaßt vor allem die Verknüpfung relativer Beschreibungen und Modifikation vorgegebener Stellungen.

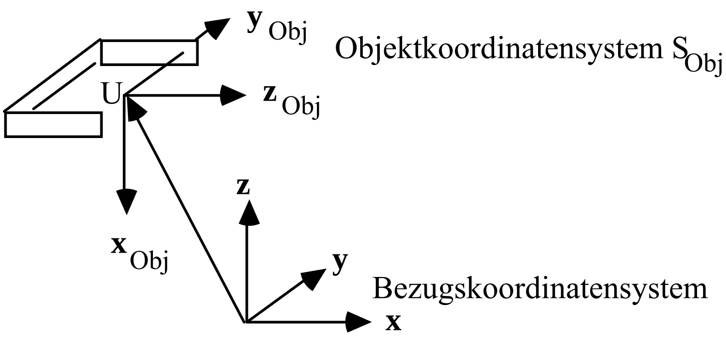
Beim Übergang zu homogenen Koordinaten wird das Tripel P = $(x,y,z)^T$ eines Raumpunktes P zum Quadrupel $(x,y,z,1)^T$ umgeformt. Für den Vektor **v** = $(x,y,z)^T$ ergeben sich die homogenen Koordinaten durch eine Erweiterung auf $(x,y,z,0)^T$.

Die Idee der homogenen Erweiterung stammt aus der projektiven Geometrie [Newman 79]; allerdings werden die weitergehenden Möglichkeiten, die dieser Bereich bietet, in der Roboterkinematik nicht benötigt und daher auch nicht übernommen. Die Strukturerweiterung durch 1 und 0 dient oberflächlich betrachtet lediglich der Vereinfachung des Aufschreibungsaufwandes.

Ein Beispiel für diese vereinfachende Anwendungsweise der homogenen Struktur findet sich im Abschnitt 1.2 . Ebenso wird dort noch etwas näher auf die Herleitung dieser homogenen Struktur eingegangen und gezeigt, daß zum Erhalt der Eigenschaft eines freien Vektors die Unterscheidung zwischen der 1-Erweiterung bei Raumpunkten und der 0-Erweiterung bei Vektoren zwingend notwendig ist.

Zum Nachweis, daß die oben definierte Erweiterung zum homogenen Punktraum mit dem bisher bekannten dreidimensionalen Punktraum äquivalent ist, wird auf Lehrbücher der projektiven Geometrie (z.B. [Penna 86]) bzw. auf [Heiß 85] verwiesen.

Die Stellung eines Objekts läßt sich nun beschreiben durch die Angabe der Koordinaten der **x**-, **y**- und **z**-Einheitsvektoren und der Position des Ursprungs des Objektkoordinatensystems. Die Beschreibung erfolgt jeweils bezüglich des Bezugskoordinatensystems. Werden diese drei Vektoren und die Punktkoordinaten spaltenweise zu einer 3×4-Matrix zusammengefaßt und durch eine vierte Zeile (0,0,0,1) zu einer 4×4-Matrix erweitert, so entsteht die *homogene- 4×4-Matrix* zur Beschreibung der Objektstellung.



$$(\mathbf{x}_{Obj}, \mathbf{y}_{Obj}, \mathbf{z}_{Obj}, \mathrm{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ -1 & 0 & 0 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abb. 1.2: Darstellung des Objektkoordinatensystems S_{Obj} durch eine homogene 4×4-Matrix

Abb. 1.2 legt es nahe, die einzelnen Spalten der homogenen 4×4-Matrix als homogene **x**-, **y**-, **z**-Einheitsvektoren und als homogene Punktbeschreibung zu interpretieren. Die einfache Form der vierten Zeile der homogenen 4×4-Matrix liegt jedoch darin begründet, daß in der Roboterkinematik keine Skalierungsoperatoren und perspektivische Transformationen vorkommen. Detailliertere Darstellungen der homogenen zen finden sich in Lehrbüchern der projektiven Geometrie oder z.B. in [Giloi 78].

Wie bereits oben gezeigt wurde, sind zur Darstellung beliebiger Stellungen im Raum sechs Kenngrößen ausreichend. Ein Vergleich der in Zeile 1 mit Zeile 3 der homogenen 4×4-Matrix enthaltenen zwölf nichttrivialen Kenngrößen hiermit zeigt, daß bei dieser Darstellungsart sechs Kenngrößen redundant sind. Diese Redundanz resultiert aus der Orthonormalitätsbedingung, der die drei Vektoren **x**, **y** und **z** des kartesischen Rechtskoordinatensystems unterworfen sind.

In einigen Darstellungen wird eine homogene 4×4-Matrix als *Frame* bezeichnet. Wir vermeiden hier diesen Begriff nach Möglichkeit, weil er im Bereich der Wissensrepräsentation und der Planung in der Robotik mit vollständig anderer Bedeutung ebenfalls benutzt wird.

1.1.3 Duale Zahlen und duale 3×3-Matrizen

Die Benutzung dualer Zahlen wird in manchen Literaturstellen als der wesentliche Fortschritt in der Roboterkinematik bezeichnet [Yang 74, Lara-Feria 86]. Diese Einschätzung erscheint uns etwas zu euphorisch, denn sämtliche Ergebnisse aus der Anwendung dieses Prinzips können ebenso durch den Einsatz homogener 4×4-Matrizen erhalten werden. Auch im Hinblick auf den Rechenaufwand ist das Verfahren mit homogenen 4×4-Matrizen nur in wenigen Sonderfällen schlechter. Dennoch treten die dualen Zahlen in der Robotikliteratur so häufig auf, daß wir sie in dieser Einführung nicht unbehandelt lassen wollen, nicht zuletzt, um dem Leser eine Möglichkeit zur eigenen Beurteilung zu geben.

Duale- Zahlen sind von der Form $d=dp+\varepsilon\cdot ds$, wobei $dp, ds \in \Re$ und $\varepsilon^2=0$ gilt und dp als und ds als bezeichnet wird. und Multiplikation zweier dualer Zahlen lassen sich analog zu den komplexen Zahlen aus den Verknüpfungsregeln des Körpers $\Re$ der reellen Zahlen ableiten:

Seien $d_1=dp_1+\varepsilon\cdot ds_1$ und $d_2=dp_2+\varepsilon\cdot ds_2$ zwei duale Zahlen, dann gilt:

$$d_1+d_2 = dp_1+dp_2 + \varepsilon\cdot(ds_1+ds_2)$$
$$d_1\cdot d_2 = dp_1\cdot dp_2 + \varepsilon\cdot(dp_1\cdot ds_2+ds_1\cdot dp_2)$$

Durch die spezielle Definition $\varepsilon^2=0$ behalten viele Gesetzmäßigkeiten, die für reelle Zahlen gelten, ihre Gültigkeit auch für duale Zahlen. Dies gilt besonders für alle trigonometrischen Sätze, wie z.B. $\sin^2(d)+\cos^2(d)=1$.

Reelle Funktionen lassen sich nämlich sehr einfach auf duale Zahlen erweitern. Eine Funktion mit dualer Variablen wird über ihre Taylorreihe definiert [Rooney 75] und die Eigenschaft, daß $\varepsilon^2=0$ ist, ergibt dann:

$$f(dp+\varepsilon\cdot ds) = f(dp) + \varepsilon\cdot ds\cdot f'(dp) + \underbrace{\varepsilon^2\cdot ds^2/2!\cdot f''(dp) + \ldots}_{=0}$$

Speziell für die häufig benötigten Funktionen Sinus und Cosinus gilt [Yang 74]:

$$\sin(dp+\varepsilon\cdot ds) = \sin(dp) + \varepsilon\cdot ds\cdot\cos(dp)$$
$$\cos(dp+\varepsilon\cdot ds) = \cos(dp) - \varepsilon\cdot ds\cdot\sin(dp)$$

Einerseits kann durch eine Dualzahl sowohl die Drehung dp um eine Achse als auch die Schiebung ds entlang dieser Achse dargestellt werden.

Andererseits können drei Dualzahlen zu einem dualen duale -r Vektor $(d_1, d_2, d_2)^T$ zusammengefaßt werden, so daß damit die und die Position einer Geraden im Raum beschrieben werden kann. Die Primärteile $(dp_1, dp_2, dp_3)^T$ definieren hierbei den normierten Einheitsorientierungsvektor **o** der Geraden. Mit den Sekundärteilen $(ds_1, ds_2, ds_3)^T$ könnte der Lotvektor vom Nullpunkt des Bezugsystems zur Geraden dargestellt werden. Statt des Lotvektors wird jedoch das Kreuzprodukt aus Lotvektor und Orientierungsvektor der Geraden im Sekundärteil angegeben. Dies sind die sogenannten der Geraden. Da jeder Punkt der Geraden zur Berechnung herangezogen werden kann, führt diese Definition einerseits zu einer rechentechnischen Vereinfachung der Datenstruktur, andererseits entspricht diese Größe dem aus der Mechanik bekannten Begriff des Moments. Da mit Hilfe des Kreuzprodukts aus Orientierungsvektor und Momentenvektor der Lotvektor gewonnen werden kann, stellt die Verwendung des Momentenvektors keine Einschränkung dar. Weitere Vorteile der Benutzung dieser Darstellung werden in Abschnitt. 1.2.4, 2.1.2 und 2.4.2 sichtbar.

Veranschaulichung der Berechnung des Momentenvektors **m**: Sei **l** der Lotvektor und **o** der Orientierungsvektor einer Geraden mit |**o**|=1, A ein beliebiger Punkt auf der Geraden und **a** der zugehörige Vektor vom Nullpunkt des Bezugsystems.

Der Vektor **a** läßt sich zerlegen in $\mathbf{a} = \mathbf{l} + \lambda \cdot \mathbf{o}$, $\lambda \in \Re$.

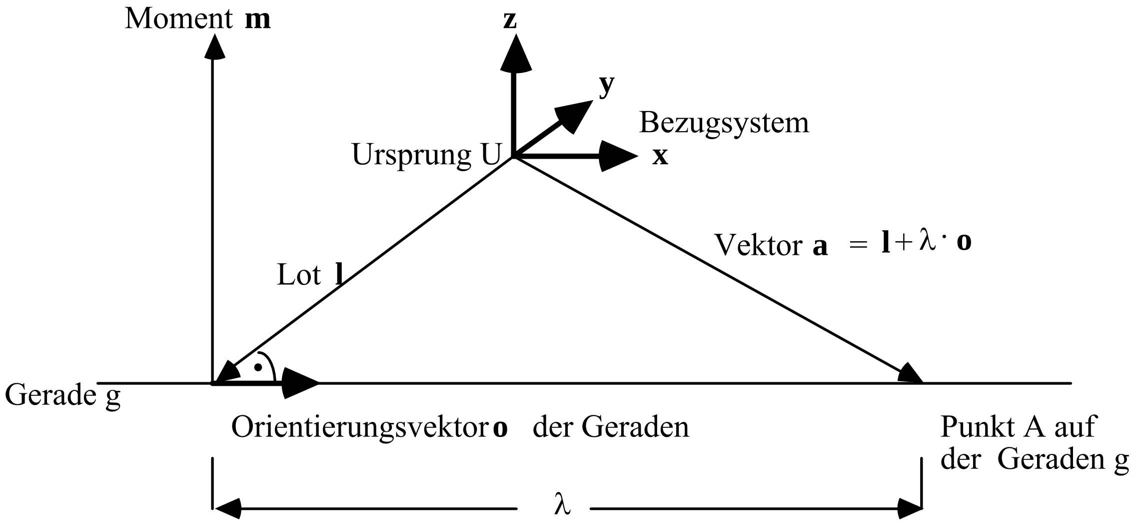


Abb. 1.3: Lot- und Momentenvektor einer Geraden

Es gilt: $\mathbf{m} = \mathbf{l} \times \mathbf{o} = (\mathbf{l} + \lambda \cdot \mathbf{o}) \times \mathbf{o} = \mathbf{a} \times \mathbf{o}$
$|\mathbf{m}| = |\mathbf{l} \times \mathbf{o}| = |\mathbf{l}| \cdot |\mathbf{o}| \cdot \sin(90°) = |\mathbf{l}|$
$\mathbf{l} = \mathbf{o} \times \mathbf{m}$

Beispiel für die Berechnung der Plückerkoordinaten der $\mathbf{x}_{Obj}$-Achse in Abb. 1.4:
$\mathbf{x}_{Obj} = (d_1 , d_2 , d_3)^T = (dp_1{+}\varepsilon \cdot ds_1 , dp_2{+}\varepsilon \cdot ds_2 , dp_3{+}\varepsilon \cdot ds_3)^T$
$\mathbf{o}_{xObj} = (dp_1 , dp_2 , dp_3)^T = (0 , 0 , -1)^T$
$\mathbf{a}_{xObj} = (u_x , u_y , u_z)^T$ { Ursprung ist Punkt auf der Geraden}
$\mathbf{m} = \mathbf{a}_{xObj} \times \mathbf{o}_{xObj} = (-u_y , u_x , 0)^T$
$\mathbf{x}_{Obj} = (0-\varepsilon \cdot u_y , 0+\varepsilon \cdot u_x , -1)^T$
Die vollständige Stellungsbeschreibung für dieses Beispiel ist der Abb. 1.4 zu entnehmen.

Eine umfassende Motivation für den Einsatz von dualen Zahlen liefert das "Übertragungsprinzip" [Rooney 75]:
Alle Sätze und Formeln, die sich auf sphärische Sachverhalte (reelle Winkel und Ursprungsgeraden) beziehen, sind ebenso gültig, wenn man sie auf entsprechende räumliche Sachverhalte (duale Winkel und Raumgeraden) anwendet; man muß nur jeden reellen Winkel α in der ursprünglichen (sphärischen) Formel durch den entsprechenden dualen Winkel $\alpha\text{dual} = \alpha + \varepsilon \cdot a$ ersetzen [Glavina 85].

Mit der Verwendung von dualen Vektoren wurde der Übergang von der Raumpunktgeometrie zur Liniengeometrie vollzogen. Mit einem dualen Vektor können nur noch gerichtete Geraden im Raum, aber keine Punkte und freie Vektoren mehr dargestellt werden. Um Punkte und freie Vektoren darstellen zu können, muß auf den Schnittpunkt zweier Geraden bzw. auf die isolierte Betrachtung des Primärteils der Geraden zurückgegriffen werden.

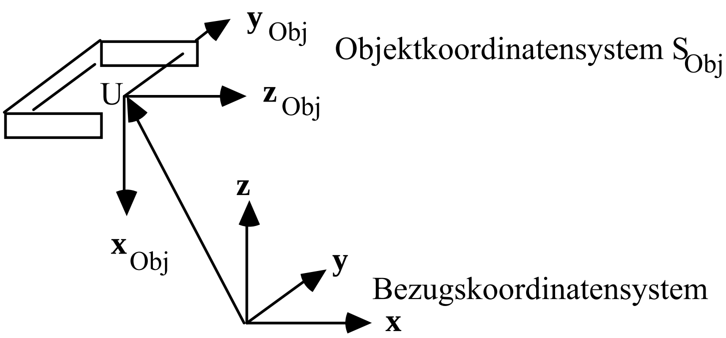
Unter Verwendung von Dualvektoren können die durch die Einheitsvektoren des Objektkoordinatensystems definierten Geraden beschrieben und zu einer dualenduale - 3×3-Matrix $\mathbf{D} = \mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$ zusammengefaßt werden; je nach Anwendungsfall wird **D** als 3×3-Matrix dualer Zahlen oder als Paar zweier reeller 3×3-Matrizen $\mathbf{Dp} + \varepsilon \cdot \mathbf{Ds}$, dem Primärteil **Dp** von **D** und dem Sekundärteil **Ds** von **D**, dargestellt. Der Ursprung des Objektkoordinatensystems ist implizit als Schnittpunkt der drei gerichteten Geraden in x-, y- und z-Richtung definiert.

Die und von dualen 3×3-Matrizen sind durch die Regeln des Körpers $\Re$ und die Definition $\varepsilon^2=0$ bestimmt:

$$\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2 = \mathbf{Dp}_1+\mathbf{Dp}_2 + \varepsilon \cdot (\mathbf{Ds}_1+\mathbf{Ds}_2)$$

$$\mathbf{D}_1 \bullet \mathbf{D}_2 = \mathbf{Dp}_1 \bullet \mathbf{Dp}_2 + \varepsilon \cdot (\mathbf{Dp}_1 \bullet \mathbf{Ds}_2+\mathbf{Ds}_1 \bullet \mathbf{Dp}_2)$$

Da die duale 3×3-Matrix 18 nichttriviale Kenndaten enthält, weist diese Darstellungsform im Vergleich zur homogenen 4×4-Matrix eine höhere Redundanz auf. Auch die Streichung der bei der homogenen 4×4-Matrix explizit vorhandenen Positionsspalte erweist sich i.a. nicht als Vorteil, da die Positionsinformation über alle drei verbleibenden Vektoren verteilt ist. Ebenso werden die Einsparungen, die sich bei einer 3×3-Matrixmultiplikation im Vergleich zur 4×4-Matrix ergeben, durch die notwendig werdende Aufspaltung in Primär- und Sekundärteil wieder aufgehoben. Nur für Berechnungen ganz spezieller Roboterkonstruktionen (zwei Rotationsgelenke, zwei Zylindergelenke) ist der Ansatz mit dualen 3×3−Matrizen in etwa gleichwertig mit der Verwendung homogener 4×4-Matrizen (vgl. Abschnitt 2.4.2).



$$(\mathbf{x}_{Obj}, \mathbf{y}_{Obj}, \mathbf{z}_{Obj}) = \begin{bmatrix} 0-\varepsilon \cdot u_y & 0-\varepsilon \cdot u_z & 1 \\ 0+\varepsilon \cdot u_x & 1 & 0+\varepsilon \cdot u_z \\ -1 & 0+\varepsilon \cdot u_x & 0-\varepsilon \cdot u_y \end{bmatrix}$$

Abb. 1.4: Darstellung des Objektkoordinatensystems S_{Obj} durch eine duale 3×3-Matrix

1.1.4 Duale Quaternionen

Eine *reelle* besteht aus vier reellen Werten: $\mathbf{Q} = (r_1 , r_2 , r_3 , r_4)$, $r_1 , r_2 , r_3 , r_4 \in \Re$. Diese vier Werte beschreiben im Prinzip einen Drehwinkel und die zugehörige Drehachse durch einen dreidimensionalen Vektor. Damit können durch eine Quaternion alle Drehungen dargestellt werden, bei denen die Drehachse durch den Ursprung des Bezugsystems geht. Reelle Quaternionen eignen sich somit zwar für die Orientierungsdarstellung eines Objekts, nicht jedoch für die Wiedergabe der räumlichen Stellung, da hiermit keine Verschiebung ausgedrückt werden kann.

Laut Chasles-Theorem, kurz zusammengefaßt in [Ball 1876], ist der Übergang vom Bezugskoordinatensystem zum Objektkoordinatensystem immer durch eine Drehung und eine Schiebung bezüglich *einer* geeignet gewählten Achse erreichbar; die Darstellung dieses Übergangs ist aber identisch mit der Stellungsbeschreibung eines Objekts.

Um neben der rotatorischen Bewegung auch die benötigte Translation in einer Quaternion ausdrücken zu können, werden die vier reellen Werte durch vier Dualzahlen ersetzt und eine *duale - Quaternion* $\mathbf{DQ} = (d_1 , d_2 , d_3 , d_4)$, $d_i = dp_i + \varepsilon \cdot ds_i$, definiert.

Wie im vorigen Abschnitt schon erläutert, können durch eine Dualzahl der Winkelwert und die Verschiebungsgröße und durch die restlichen 3 Dualzahlen eine beliebige, gerichtete Gerade im Raum angegeben werden, bezüglich der die Rotation und Translation erfolgen. Damit eignen sich Dualquaternionen zur Stellungsbeschreibung eines Objekts und zeichnen sich mit ihren 8 Kenndaten durch eine sehr geringe Redundanz aus. Gleichzeitig sind Dualquaternionen im Gegensatz zum sechsdimensionalen Beschreibungsvektor auch für die Verknüpfung von Stellungen geeignet. Allerdings hebt die Komplexität der Verarbeitungsvorschrift (z.B. für die Multiplikation, vgl. Abschnitt. 1.2.7) und die Schwierigkeit für den Anwender, eine Stellung durch Angabe einer Dualquaternion zu beschreiben, den Vorteil der geringen Redundanz wieder auf und läßt die homogene 4×4-Matrix für die Roboterkinematik als vorteilhafter erscheinen.

Ein Beispiel für eine Stellungsbeschreibung mit einer dualen Quaternion verschieben wir auf Abschnitt 1.2.9.