

2 Roboterkinematik

Folgende zwei grundlegende Fragestellungen treten in der Roboterkinematik auf:

- Vorwärtsrechnung:
Hier wird bei gegebenen Gelenkeinstellungen die Effektorstellung bezüglich des festgelegten Bezugssystems berechnet.
- Rückwärtsrechnung:
Hier werden die zur Erreichung einer vorgegebenen Effektorstellung notwendigen Gelenkeinstellungen ermittelt. Dazu wird im wesentlichen die aus der Vorwärtsrechnung bekannte Matrix der Effektorstellung mit der gewünschten Zielstellung gleichgesetzt und diese *kinematische Gleichung* nach den Gelenkvariablen aufgelöst; insofern ist die Vorwärtsrechnung Voraussetzung für die Rückwärtsrechnung.

Im allgemeinen führt die Rückwärtsrechnung auf die Lösung eines transzendenten Gleichungssystems, das bekanntlich nicht immer geschlossen lösbar ist. Im Gegensatz dazu gelingt die Vorwärtsrechnung jedoch für alle n Ketten, insbesondere für alle Roboterkonstruktionen.

Es werden deshalb zunächst die Vorwärtsrechnung und Ansätze zur Vereinfachung der Rückwärtsrechnung behandelt; anschließend werden Lösungsverfahren und Voraussetzungen beschrieben, die eine Rückwärtsrechnung explizite, d.h. geschlossene Lösung der kinematischen Gleichung erlauben. Diese Voraussetzungen geben auch dem Roboterkonstrukteur Entwurfskriterien an die Hand, um für die Rückwärtsrechnung optimal geeignete und damit leicht steuerbare Roboter zu entwickeln. Die im Kapitel 2.3 vorgestellten Lösungsverfahren zeichnen sich darüberhinaus dadurch aus, daß die zugehörigen Lösungsformeln für die Gelenkgleichungen aus Polynomen vom Grad ≤ 2 abgeleitet werden können. Wie aus der Mathematik bekannt ist [Meyberg 75, Meyberg 76], existieren natürlich prinzipiell auch geschlossene Lösungen, wenn die Polynome vom Grad ≤ 4 sind. Diese Einschränkung gegenüber mehr mathematisch geprägten Darstellungen [Pieper 69, Roth 76], bietet den Vorteil, daß aus diesen Lösungsfunktionen noch detaillierte Aussagen über das Gelenkverhalten getroffen werden können. Bei Polynomen vom Grad > 4 muß ohnehin auf numerische Lösungsmethoden zurückgegriffen werden, was wir, abgesehen von Spezialfällen schon bei Polynomen vom Grad > 2 empfehlen, da die geschlossene Lösung hier keine Vorteile mehr bietet. Als ein Beispiel für numerische Lösungsverfahren wird in Kapitel 2.6 die inkrementelle , ein auf

iterativen Methoden basierendes differentielles, linearisiertes Verfahren zur Behandlung der Rückwärtsrechnung dargestellt.

2.1 Theorie der Vorwärtsrechnung

2.1.1 Prinzipielle Vorgehensweise

Um den Aufwand für die Vorwärtsrechnung zu verringern, ist es wünschenswert, eine für alle Roboter geeignete Berechnungsmethode zu wählen. Das von Denavit und Hartenberg [Denavit 55] entwickelte Verfahren (*D-H-Verfahren*) wird diesem Anspruch gerecht und bietet darüberhinaus noch den Vorteil, daß damit auch eine eindeutige Beschreibungsmöglichkeit für die kinematischen Aspekte der Robotermechanik geschaffen wurde.

Zur Erleichterung der Berechnung der Effektorstellung werden kartesische Rechtskoordinatensysteme als Zwischensysteme S_i in jedes Roboter gelenk G_i gelegt und nur die relative Stellung des Systems S_{i+1} zum jeweiligen Vorgängersystem S_i ermittelt. Nach einer Verkettung dieser Gelenksysteme ergibt sich dann die Effektorstellung im zugrundegelegten Bezugssystem.

Durch die Einhaltung fester Regeln, der sogenannten *Denavit-Hartenberg-Regeln (D-H-Regeln)*, bei der Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme ist gewährleistet, daß jeder Übergang von einem Gelenk zum nächsten durch eine strukturell gleiche Transformation (z.B. in Form einer homogenen 4×4 -Matrix) beschrieben werden kann. In dieser Transformation treten außer der Gelenkvariablen nur konstante, aus der mechanischen Konstruktion des Roboters resultierende Werte auf.

2.1.2 Beziehungen zwischen benachbarten Gelenken

Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme

Die im folgenden benutzten Bezeichnungen beziehen sich auf die Abb. 2.1.

Die Stellung der Gelenkkoordinatensysteme S_i , $1 \leq i \leq n$, wird durch die drei D-H-Regeln festgelegt:

1. Die Achse z_i des Systems S_i wird in die Bewegungsachse des Gelenks G_i gelegt. Ihre Richtung wird entsprechend der positiven Bewegungsrichtung des Gelenks G_i festgelegt.
2. Die Achse x_i wird durch die (nicht immer eindeutig bestimmte) gemeinsame Normale von z_{i-1} nach z_i definiert.
3. Die Achse y_i ist im Sinn eines kartesischen Rechtskoordinatensystems definiert durch $y_i = z_i \times x_i$.

Bemerkungen zur zweiten Regel:

- Das System S_0 entspricht dem Basiskoordinatensystems BKS; die Achse z_0 ist notwendig zur Bestimmung von x_1 .

- Sind die Achsen \mathbf{z}_{i-1} und \mathbf{z}_i zueinander windschief, so wird durch die gemeinsame Normale sowohl die Achse \mathbf{x}_i als auch der Ursprung U_i des Systems S_i eindeutig definiert. Der Ursprung U_i kann dann durchaus außerhalb des physikalischen Roboterjoints liegen.
- Schneiden sich die Achsen \mathbf{z}_{i-1} und \mathbf{z}_i , so ist der Ursprung U_i eindeutig definiert, die Richtung der Achse \mathbf{x}_i (als Lot auf \mathbf{z}_{i-1} und \mathbf{z}_i) ist jedoch innerhalb der zwei sich bietenden Möglichkeiten frei wählbar.
- Sind die Achsen \mathbf{z}_{i-1} und \mathbf{z}_i zueinander parallel, so ist die Achse \mathbf{x}_i eindeutig definiert und der Ursprung U_i ist frei wählbar.
- Fallen die Achsen \mathbf{z}_{i-1} und \mathbf{z}_i zusammen (Identität mit Ausnahme der Richtung), so sind sowohl die Achse \mathbf{x}_i als auch der Ursprung U_i frei wählbar.

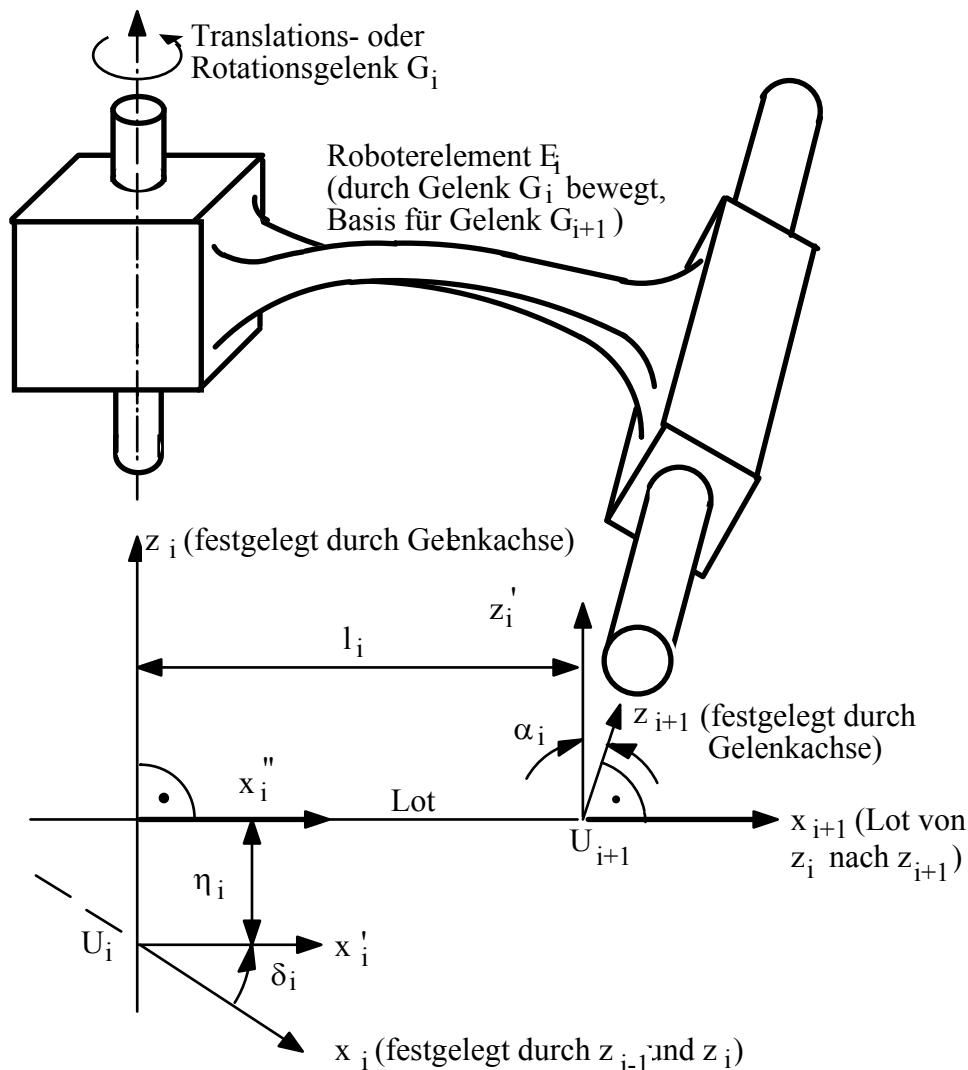


Abb. 2.1: Definition der Gelenkkoordinatensysteme

Das System S_i ist dem unbeweglichen Teil des Gelenks G_i körperfest zugeordnet, d.h.: System $S_0 = \text{BKS}$ und System S_1 sind statische Systeme (der Gelenkübergang von S_0 nach

S_1 ist konstant und enthält keine Gelenkvariable), eine Bewegung des Gelenks G_i , $1 \leq i \leq n$, verändert alle Systeme S_j , $i < j \leq n$, und das Effektorsystem S_E .

Transformation zwischen benachbarten Gelenken

Durch die D-H-Regeln ist gewährleistet, daß das System S_i , $0 \leq i \leq n$, mit vier elementaren Rotationen bzw. Translationen in das System S_{i+1} übergeführt werden kann, unabhängig davon, ob es sich bei dem zugehörigen Gelenk um ein Dreh- oder Schubgelenk handelt oder einen konstanten Übergang:

1. Rotation um die Achse z_i mit δ_i : x_i geht über in x_i' , das die Richtung von x_{i+1} hat (kurz: $R(z_i, \delta_i)$)

δ_i : Winkel zwischen der Achse x_i und der um die Achse z_i im mathematisch positiven Sinn gedrehten Achse x_{i+1}

2. Translation entlang der Achse z_i um η_i : x_i' geht über in x_i'' , das auf der Lotgeraden von z_i nach z_{i+1} liegt (kurz: $T(z_i, \eta_i)$)

η_i : Abstand des Schnittpunktes von Achse z_i mit der Lotgeraden von z_i nach z_{i+1} vom Ursprung U_i

3. Translation entlang der Achse x_i'' bzw. x_{i+1} um l_i : x_i'' geht über in x_{i+1} , der Ursprung U_{i+1} ist festgelegt als Schnittpunkt von z_{i+1} mit dem Lot von z_i nach z_{i+1} (kurz: $T(x_i, l_i)$)

l_i : Länge der gemeinsamen Normalen der Achsen z_i und z_{i+1}

4. Rotation um die Achse x_{i+1} mit α_i : z_i' geht über in z_{i+1} (kurz: $R(x_i, \alpha_i)$)

α_i : Winkel zwischen der Achse z_i und der um die Achse x_{i+1} im mathematisch positiven Sinn gedrehten Achse z_{i+1}

Die Auswirkungen dieser vier Transformationen lassen sich zu einer Stellungsangabe $D_{i,i+1}$ zusammenfassen:

$$D_{i,i+1} = Z_i \cdot X_{i+1},$$

wobei Z_i die Rotation (1.) und Translation (2.) bezüglich der z -Achse und X_{i+1} die Translation (3.) und Rotation (4.) bezüglich der x -Achse wiedergibt.

Darstellung als homogene 4×4-Matrizen

Als homogene 4×4-Matrizen haben Z_i und X_{i+1} folgende Form:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) & -\sin(\delta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\delta_i) & \cos(\delta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \eta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Wahl des Index "i+1" bei \mathbf{X}_{i+1} soll verdeutlichen, daß die Translation um l_i entlang der x_{i+1} -Achse und die Rotation um α_i um die x_{i+1} -Achse erfolgen.

$$\text{Damit wird } \mathbf{D}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) & -\sin(\delta_i) \cdot \cos(\alpha_i) & \sin(\delta_i) \cdot \sin(\alpha_i) & l_i \cdot \cos(\delta_i) \\ \sin(\delta_i) & \cos(\delta_i) \cdot \cos(\alpha_i) & -\cos(\delta_i) \cdot \sin(\alpha_i) & l_i \cdot \sin(\delta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & \eta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Darstellung als duale 3×3-Matrizen

Als duale 3×3-Matrizen haben \mathbf{Z}_i und \mathbf{X}_{i+1} folgende Form:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) - \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \sin(\delta_i) & -\sin(\delta_i) - \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \cos(\delta_i) & 0 \\ \sin(\delta_i) + \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \cos(\delta_i) & \cos(\delta_i) - \varepsilon \cdot \eta_i \cdot \sin(\delta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) - \varepsilon \cdot l_i \cdot \sin(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) - \varepsilon \cdot l_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) + \varepsilon \cdot l_i \cdot \cos(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) - \varepsilon \cdot l_i \cdot \sin(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

Werden Rotation δ_i und Translation η_i zur n Zahl $\delta\eta_i = \delta_i + \varepsilon \cdot \eta_i$ und α_i und l_i zu $\alpha l_i = \alpha_i + \varepsilon \cdot l_i$ zusammengefaßt, dann lassen sich obige Dualmatrizen vereinfacht und in völliger Analogie zum Rotationsanteil der homogenen 4×4-Darstellung aufschreiben als:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \cos(\delta\eta_i) & -\sin(\delta\eta_i) & 0 \\ \sin(\delta\eta_i) & \cos(\delta\eta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha l_i) & -\sin(\alpha l_i) \\ 0 & \sin(\alpha l_i) & \cos(\alpha l_i) \end{bmatrix}$$

Diese vereinfachte Schreibweise – die durch die Verwendung des Momentenvektors statt des Lotvektors möglich wird – darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß spätestens

dann, wenn eine Aussage über den Ursprung eines Objektkoordinatensystems gemacht werden soll, die dualen Zahlen in ihren Primär- und Sekundärteil aufgespalten werden müssen, so daß der Rechenaufwand hierdurch nicht reduziert wird.

Darstellung als duale Quaternionen

Als duale qen haben \mathbf{Z}_i und \mathbf{X}_{i+1} unter Verwendung der dualen Zahlen $\delta\eta_i$ und $\alpha_i l_i$ folgende Form:

$$\mathbf{Z}_i = (\cos(\delta\eta_i/2), 0, 0, \sin(\delta\eta_i/2))^T$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = (\cos(\alpha_i l_i/2), \sin(\alpha_i l_i/2), 0, 0)^T$$

Für die Multiplikation $\mathbf{D}_{i,i+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$ ergibt sich dann:

$$\mathbf{D}_{i,i+1} = (\cos(\delta\eta_i/2) \cdot \cos(\alpha_i l_i/2), \cos(\delta\eta_i/2) \cdot \sin(\alpha_i l_i/2), \sin(\delta\eta_i/2) \cdot \sin(\alpha_i l_i/2), \sin(\delta\eta_i/2) \cdot \cos(\alpha_i l_i/2))^T$$

Unterscheidung von Dreh- und Schubgelenken

Wird nun die Matrix \mathbf{Z}_i speziell unter dem Gesichtspunkt der verschiedenen Gelenkarten (Dreh- und Schubgelenk) betrachtet, so zeigt sich folgender Unterschied:

- Bei Drehgelenken setzt sich der Drehwinkel δ_i aus einem konstanten Winkel ϑ_i und der *Gelenkvariablen* d_i zusammen: $\delta_i = \vartheta_i + d_i$
Der konstante Winkel ϑ_i dient dazu, bezüglich der Nullstellungen der Gelenke die Achse \mathbf{x}_i in die Achse \mathbf{x}_{i+1} überzuführen.
- Bei Schubgelenken setzt sich die Translationsgröße η_i aus einem konstanten Wert h_i und der Gelenkvariablen t_i zusammen: $\eta_i = h_i + t_i$
 h_i entspricht dem Abstand zwischen Ursprung U_i und dem Schnittpunkt der Achse \mathbf{z}_i mit der Normalen von \mathbf{z}_i nach \mathbf{z}_{i+1} bei Nullstellung des Gelenks G_i .

Die für die Matrix \mathbf{X}_{i+1} bestimmenden Größen l_i und α_i sind immer Konstanten, die durch die Konstruktion des Roboters festgelegt sind.

Damit bezeichnet das Vierertupel $(\vartheta_i + d_i, h_i, l_i, \alpha_i)$ den Übergang vom System S_i ins System S_{i+1} für ein Drehgelenk und $(\vartheta_i, h_i + t_i, l_i, \alpha_i)$ den Übergang für ein Schubgelenk. Für $(\delta_i, \eta_i, l_i, \alpha_i)$ wird von der Gelenkart im Zuge der mathematischen Bearbeitung abstrahiert; die zugehörige *allgemeine* (entweder d_i oder t_i) wird mit v_i bezeichnet.

Die beiden aus den D-H-Regeln abgeleiteten Vierertupel $(\vartheta_i + d_i, h_i, l_i, \alpha_i)$ und $(\vartheta_i, h_i + t_i, l_i, \alpha_i)$ genügen zur eindeutigen Beschreibung von Robotern in der Roboterkinematik; im weiteren Verlauf werden deshalb Roboter mit n Gelenken durch die n zugehörigen Vierertupel (*D-H-Parameter*) charakterisiert.

2.1.3 Berechnung der Effektorstellung

Um nun die Effektorstellung im Basiskoordinatensystem BKS berechnen zu können, genügt es, die relativen Stellungenbeschreibungen $\mathbf{D}_{i,i+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$ multiplikativ zu verknüpfen. Damit ist für die Berechnung der Effektorstellung im wesentlichen das Produkt \mathbf{P} der relativen Stellungenbeschreibungen von Interesse [Lee 82, Paul 81b]:

$$\mathbf{P} = \prod_{i=0}^n \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$$

Um eine für alle Roboterkonstruktionen und Effektorformen gültige Berechnungsmethode zu erhalten, muß das Produkt \mathbf{P} eventuell noch um einen konstanten Systemübergang \mathbf{TR} erweitert werden. Durch die oben beschriebene Transformation $\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{X}_{i+1}$ kann nur die Lage einer *Achse* (in unserem Fall der Achse \mathbf{z}_{i+1}) eindeutig festgelegt werden. Das Erreichen eines exakt definierten Punktes auf der Achse \mathbf{z}_{i+1} als Ursprung U_{i+1} kann i.a. mit den D-H-Regeln nicht erzwungen werden. Dies wirft lediglich dann ein Problem auf, wenn das Effektorkoordinatensystem S_E nicht frei wählbar ist, sondern aus anwendungsbezogenen Gründen bereits festgelegt wurde. Um den Ursprung U_{n+1} des aus den D-H-Regeln resultierenden Systems S_{n+1} mit dem Ursprung U_E des Effektorsystems S_E in Deckung zu bringen, muß u.U. das System S_{n+1} um eine konstante Translation \mathbf{T}_E entlang der Achse \mathbf{z}_{n+1} verschoben werden.

Da die x-Achse des Effektorkoordinatensystems nicht als Normale auf \mathbf{z}_E und die letzte Gelenkachse \mathbf{z}_n definiert sein muß, kann es auch passieren, daß die Orientierung des Effektorkoordinatensystems S_E durch die letzte Transformationsmatrix $\mathbf{D}_{n,n+1}$ nicht erreicht wird. Deshalb wird, ausgehend von der vorgegebenen Achse \mathbf{z}_E , ein zusätzliches Zwischensystem S_{n+1} entsprechend den D-H-Regeln definiert. Der Übergang von System S_n zum System S_{n+1} ist dann durch die Transformation $\mathbf{Z}_n \cdot \mathbf{X}_{n+1}$ darstellbar und der Übergang vom System S_{n+1} zum System S_E läßt sich durch eine weitere, konstante Transformation erreichen, die aus der Translation \mathbf{T}_E entlang der Achse \mathbf{z}_E (=Achse \mathbf{z}_{n+1}) und einer Rotation um die Achse \mathbf{z}_E besteht.

$$\mathbf{TR} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_E) & -\sin(\vartheta_E) & 0 & 0 \\ \sin(\vartheta_E) & \cos(\vartheta_E) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit h_E = Abstand zwischen Ursprung U_{n+1} und Ursprung U_E
 ϑ_E = Winkel zwischen der Achse \mathbf{x}_{n+1} und der Achse \mathbf{x}_E

Auf die Darstellung der konstanten Transformationsmatrixkonstante - **TR** in Form einer dualen 3×3 -Matrix und einer Dualquaternion wollen wir hier verzichten, da diese Umwandlung schon an mehreren Beispielen gezeigt wurde.

Die Effektorstellung, bezogen auf ein beliebig vorgegebenes Basiskoordinatensystem $BKS = S_0$ und bei beliebig gewähltem Effektorkoordinatensystem S_E , ergibt sich dann durch die Multiplikation der aus den D-H-Parametern gewonnenen Übergangsbeschreibungen der Zwischensysteme S_i und der Transformation **TR** und kann als Funktion F der allgemeinen n Gelenkvariablen v_i verstanden werden:

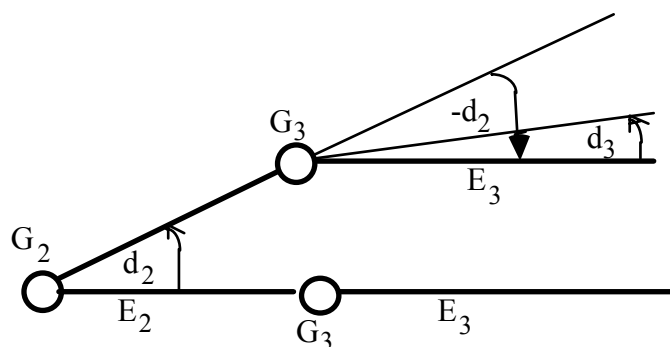
$${}^{BKS}\mathbf{Effektor} = \left(\prod_{i=0}^n (Z_i \cdot X_{i+1}) \right)$$

$$\bullet \mathbf{TR} = F(v_1, \dots, v_n)$$

2.1.4 Vereinfachungen und Sonderfälle bei der Vorwärtsrechnung

Sind zwei parallele Rotationsachsen des Roboters aufgrund der mechanischen Konstruktion unabhängig von den eingestellten Gelenkvariablen zueinander parallel, so lassen sich die Formeln für die Effektorstellung durch ein Zusammenfassen der Winkel δ_i und δ_j zu $\delta_i \pm \delta_j$ bzw. α_i und α_j zu $\alpha_i \pm \alpha_j$ verkürzen; bei gleichen Gelenkdrehrichtungen gilt der Plusoperator, bei entgegengesetzt drehenden Gelenken gilt Minus. Der eigentliche Vorteil dieser Vereinfachung zeigt sich erst bei der Rückwärtsrechnung, für die Vorwärtsrechnung werden dadurch in der Regel nur einige Multiplikationen und Additionen eingespart.

Häufig gibt es bei Robotern Sonderkonstruktionen, die als *statische Gelenke* bezeichnet werden. Bei der bisher geschilderten Betrachtungsweise verändert eine (Dreh-) Gelenkbewegung die Orientierung und die Position aller nachfolgenden Roboterelemente, die Nullstellung eines Roboterjoints ist im D-H-Verfahren daher immer bezüglich der aktuellen Lage des Vorgängerelements definiert. Verändert nun – bedingt durch die spezielle Mechanik des Roboters – ein Rotationsgelenk G_i die Orientierung eines (zur Rotationsachse nichtparallelen) Nachfolgerelements E_j nicht, so wird das Gelenk G_j als *statisch bezüglich des Gelenks G_i* bezeichnet. Dies muß durch eine Substitution der Gelenkvariablen d_j durch $d_j \pm d_i$ im D-H-Verfahren berücksichtigt werden.



Eine Bewegung des Gelenks G_2 läßt E_3 in seiner Orientierung unverändert.

$$d_3 \rightarrow d_{3\text{Sub}} = d_3 - d_2 \text{ bei gleichgerichteten Gelenkachsen}$$

$$d_3 \rightarrow d_{3\text{Sub}} = d_3 + d_2 \text{ bei entgegengesetzten Gelenkachsen}$$

Abb. 2.2: Statische Gelenke

Für den häufigen Sonderfall statischer Gelenke, deren parallele Rotationsachsen zwangsläufig parallel sind, ergibt sich auch bei der Vorwärtsrechnung einen wesentlichen Vorteil. Durch die Substitution von d_j durch $d_j \mp d_i$ und die Zusammenfassung von d_i und d_j zu $d_{i \pm j}$ ergibt sich als Resultat der Winkel $\pm d_j$ allein.

2.1.5 Optimale Null-Lagen der Robotergelenke

Prinzipiell sind die Null-Lagen der Robotergelenke und ihre positive Bewegungsrichtung frei wählbar. Erscheint es günstig, so können bei der Wahl der auch mechanisch unzulässige Gelenkstellungen gewählt werden. Dies hat lediglich zur Folge, daß eine solche Nullstellung des Gelenks im realen Betrieb nie angefahren werden kann.

Eine spezielle, für den Benutzer einprägsame Wahl der Null-Lagen ist nur dann notwendig, wenn der Roboter vorwiegend in Gelenkkoordinaten angesteuert werden soll.

Soll die Steuerung jedoch in kartesischen Koordinaten erfolgen, dann ist es sinnvoll, durch eine geeignete Wahl der Null-Lagen im Zuge des D-H-Verfahrens den (Rechen-)Aufwand bei der Bestimmung der Transformationsmatrizen $\mathbf{D}_{i,i+1}$ zu vereinfachen. Dazu dient folgendes Verfahren:

- 1) Die Achse \mathbf{x}_1 ist – als Normale von der Achse \mathbf{z}_0 des Basiskoordinatensystems auf die Achse \mathbf{z}_1 – definiert bzw. für $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1$ beliebig wählbar. Im zweiten Fall empfiehlt es sich, die Achse \mathbf{x}_1 als Normale von der Achse \mathbf{z}_1 zur Achse \mathbf{z}_2 zu wählen. Dies hat zur Folge, daß bei einem Translationsgelenk G_1 der Winkel $\vartheta_1=0$ bzw. bei einem Rotationsgelenk G_1 die Verschiebung $h_1=0$ wird.

- 2a) Das Gelenk i sei ein Drehgelenk, $1 \leq i \leq n$:

Das Gelenk i wird in solch eine eventuell mechanisch nicht erreichbare Stellung gebracht, daß die Normale von der Achse \mathbf{z}_i zur Achse \mathbf{z}_{i+1} parallel und gleichgerichtet mit der Achse \mathbf{x}_i ist (\mathbf{x}_i ist definiert durch die Achsen \mathbf{z}_{i-1} und \mathbf{z}_i).

Effekt: Statt bei jedem Systemübergang die Achse \mathbf{x}_i durch eine Drehung um ϑ_i auf die Normale auszurichten, dreht man bei der Bestimmung der optimalen Null-Lage die Normale zur Achse \mathbf{x}_i hin, so daß der Winkel $\vartheta_i = 0$ wird.

- 2b) Das Gelenk i sei ein Schubgelenk, $1 \leq i \leq n$:

Das Gelenk i wird in solch eine eventuell mechanisch nicht erreichbare Stellung gebracht, daß der Schnittpunkt der Achse \mathbf{z}_i mit der Normalen von der Achse \mathbf{z}_i zur Achse \mathbf{z}_{i+1} und der Koordinatenursprung U_i zusammenfallen.

Effekt: Die Verschiebung h_i wird Null.

- 2c) Bei Wahlfreiheit der Achse \mathbf{x}_{i+1} , $1 \leq i \leq n$, d.h. falls die Achsen \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_{i+1} parallel bzw. bis auf die Richtung identisch sind, kann beim Schubgelenk G_i eine beliebige Null-Lage gewählt werden, weil sich diese Festlegung durch die Wahlfreiheit der Achse \mathbf{x}_i ausgleichen läßt.
- 2d) Für ein Drehgelenk G_i ergibt sich die Wahlmöglichkeit nur bei Identität (bis auf die Richtung) der Achsen \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_{i+1} .
Analog zu Punkt 1) können auch hier durch geeignete Definition der Null-Lage von Gelenk G_i weitere Parameter zu Null gemacht werden.

Wird die zweite Regel für alle Gelenke G_i , $1 \leq i \leq n$, durchgeführt, so verschwinden die Konstanten ϑ_i und h_i aus allen Transformationsmatrizen $\mathbf{D}_{i,i+1}$ und es ergeben sich die D-H-Parameter in ihrer : $(d_i, h_i, l_i, \alpha_i)$ bzw. $(\vartheta_i, t_i, l_i, \alpha_i)$.

2.1.6 Beispiel: Berechnung der Effektorstellung des ASEA-IR B6 mit Knickhand

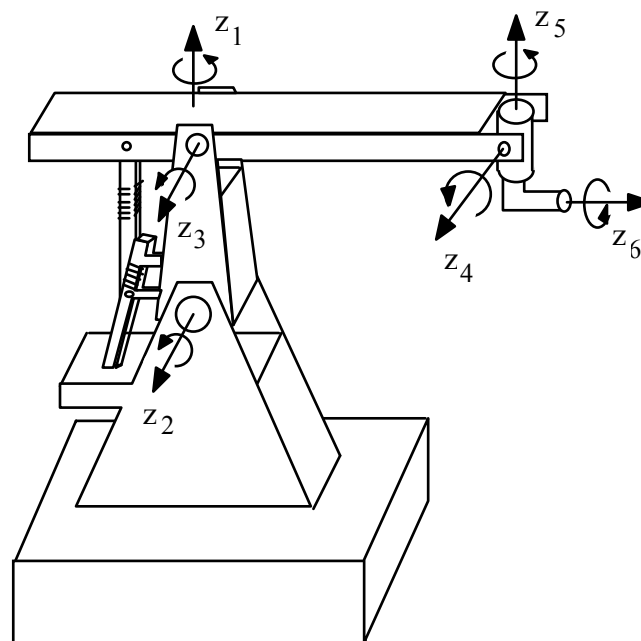


Abb. 2.3: Industrieroboter ASEA-IR B6

Die charakteristischen Werte des ASEA-IR B6 wurden aus [Heindl 83] entnommen.

Gelenk	δ_i	η_i	l_i	α_i
1	d_1	0	0	90°
2	d_2	0	L_1	0°
3	$d_3 (-d_2)$	0	L_2	0°

4	$d_4 (-d_3)$	0	0	-90°	
5	d_5	$-L_H$	0	$-90^\circ + k^\circ$	(Knickhand)
6	d_6	$-L_6$	0	-90°	
TR	-90°	L_E	0	0°	

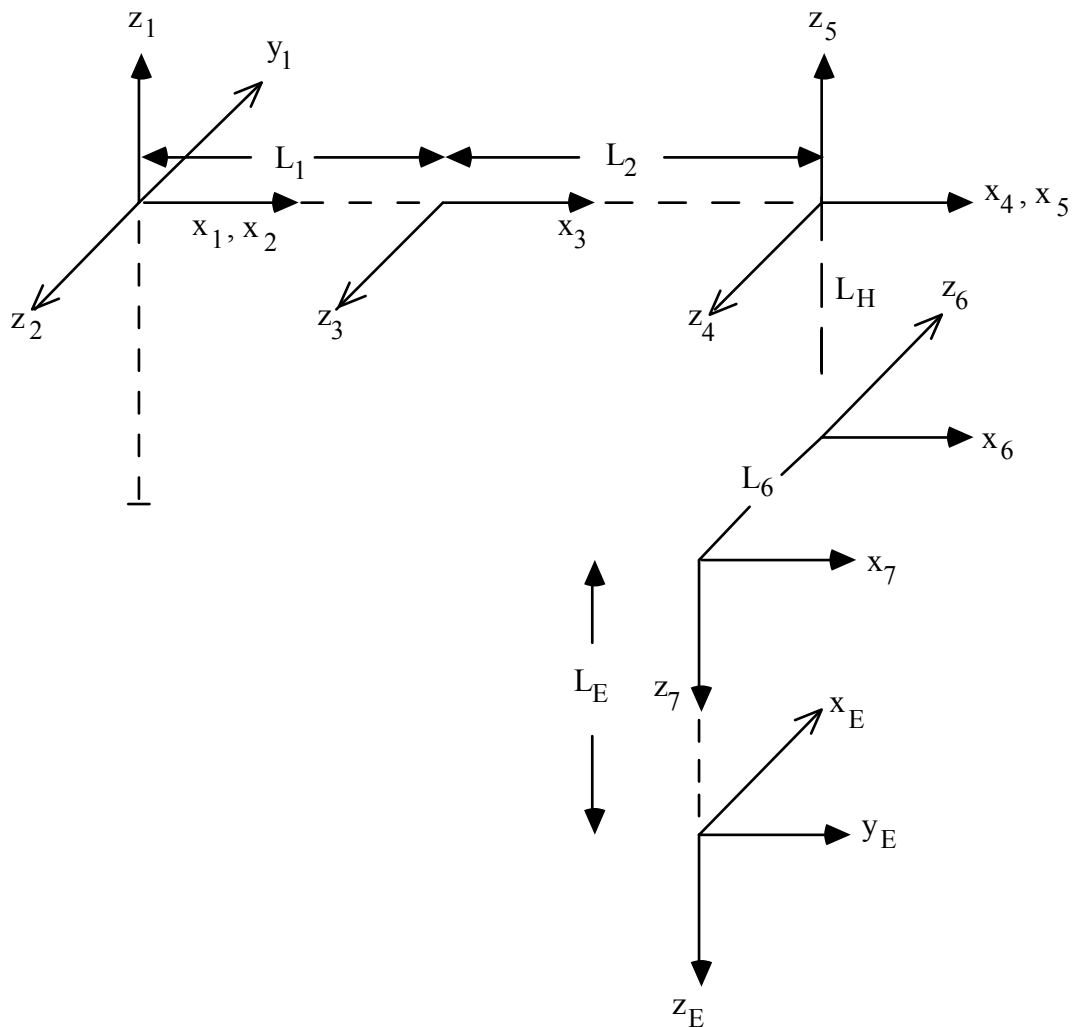


Abb. 2.4: Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme des ASEA-IR B6 in optimaler Nullstellung

Bemerkungen:

- Die Gelenke 2 und 3 verändern die Orientierung der nachfolgenden Robotererelemente nicht, d.h. Gelenk 3 ist statisch bezüglich Gelenk 2 und Gelenk 4 ist statisch bezüglich Gelenk 3. Wie im Abschnitt 2.1.4 beschrieben, müssen deshalb die Variablen d_i der statischen Gelenke G_i beim D-H-Verfahren substituiert werden durch:

$$d_{3S} = d_3 - d_2$$

$$d_{4S} = d_4 - d_3 (= d_4 - d_{3S} - d_2)$$

Die Variablen d_3 und d_4 in der Tabelle der charakteristischen Werte werden durch die Variablen d_{3S} und d_{4S} ersetzt.

- Das Basiskoordinatensystem BKS wurde optimal gewählt:
BKS = S_1 , d.h. daß der Übergang $\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{X}_1$ verschwindet und $h_1=0$ wird.

Die D-H-Parameter des ASEA-IR B6 ergeben unter Berücksichtigung der statischen Gelenke folgende Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{D}_{1,2} = \begin{bmatrix} \cos(d_1) & 0 & \sin(d_1) & 0 \\ \sin(d_1) & 0 & -\cos(d_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{2,3} = \begin{bmatrix} \cos(d_2) & -\sin(d_2) & 0 & L_1 \cdot \cos(d_2) \\ \sin(d_2) & \cos(d_2) & 0 & L_1 \cdot \sin(d_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{3,4} = \begin{bmatrix} \cos(d_3-d_2) & -\sin(d_3-d_2) & 0 & L_2 \cdot \cos(d_3-d_2) \\ \sin(d_3-d_2) & \cos(d_3-d_2) & 0 & L_2 \cdot \sin(d_3-d_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{4,5} = \begin{bmatrix} \cos(d_4-d_3) & 0 & -\sin(d_4-d_3) & 0 \\ \sin(d_4-d_3) & 0 & \cos(d_4-d_3) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{5,6} = \begin{bmatrix} \cos(d_5) & -\sin(d_5) \cdot \sin(k) & -\sin(d_5) \cdot \cos(k) & 0 \\ \sin(d_5) & \cos(d_5) \cdot \sin(k) & \cos(d_5) \cdot \cos(k) & 0 \\ 0 & -\cos(k) & \sin(k) & -L_H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{6,7} = \begin{bmatrix} \cos(d_6) & 0 & \sin(d_6) & 0 \\ \sin(d_6) & 0 & -\cos(d_6) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{TR} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für den ASEA-IR B6 folgende homogene 4×4-Matrix

$$\mathbf{M} = \prod_{i=0}^n \mathbf{D}_{i,i+1} \cdot \mathbf{TR}$$

als Beschreibung Berechnung der Effektorstellung:

$$M_{11} = -\cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k) - \sin(d_1) \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k) \\ - \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(k)$$

$$M_{12} = \cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \cos(d_6) - \sin(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) \\ + \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(d_6) \cdot \cos(k) \\ - \sin(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \cos(d_6) + \cos(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k))$$

$$M_{13} = -\cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\ + \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) \\ + \sin(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k))$$

$$M_{14} = \cos(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (-L_E \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\ + L_6 \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k)) \\ - \sin(d_1) \cdot (-L_E \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) - L_6 \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k))$$

$$\begin{aligned}
& - \cos(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot (-L_E \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) - L_6 \cdot \sin(k) - L_H) \\
& + \cos(d_1) \cdot (L_1 \cdot \cos(d_2) + L_2 \cdot \cos(d_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{21} = & - \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k) + \cos(d_1) \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k) \\
& - \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} = & \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \cos(d_6) - \sin(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) \\
& + \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \sin(d_6) \cdot \cos(k) \\
& + \cos(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \cos(d_6) + \cos(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{23} = & - \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\
& + \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) \\
& - \cos(d_1) \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{24} = & \sin(d_1) \cdot \cos(d_4) \cdot (-L_E \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) \\
& + L_6 \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k)) \\
& - \cos(d_1) \cdot (L_E \cdot (\sin(d_5) \cdot \sin(d_6) - \cos(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) + L_6 \cdot \cos(d_5) \cdot \cos(k) \\
& + \sin(d_1) \cdot \sin(d_4) \cdot (L_E \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) + L_6 \cdot \sin(k) + L_H) \\
& + \sin(d_1) \cdot (L_1 \cdot \cos(d_2) + L_2 \cdot \cos(d_3))
\end{aligned}$$

$$M_{31} = - \sin(d_4) \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k) + \cos(d_4) \cdot \sin(k)$$

$$M_{32} = \sin(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \cos(d_6) - \sin(d_5) \cdot \sin(d_6) \cdot \sin(k)) - \cos(d_4) \cdot \sin(d_6) \cdot \cos(k)$$

$$M_{33} = - \sin(d_4) \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) - \cos(d_4) \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k)$$

$$\begin{aligned}
M_{34} = & \sin(d_4) \cdot (-L_E \cdot (\cos(d_5) \cdot \sin(d_6) + \sin(d_5) \cdot \cos(d_6) \cdot \sin(k)) + L_6 \cdot \sin(d_5) \cdot \cos(k)) \\
& - \cos(d_4) \cdot (L_E \cdot \cos(d_6) \cdot \cos(k) + L_6 \cdot \sin(k) + L_H) + L_1 \cdot \sin(d_2) + L_2 \cdot \sin(d_3)
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den Transformationsmatrizen \mathbf{Z}_i und \mathbf{X}_{i+1} , für die die duale Darstellungsform durch Einführung eines dualen Winkels direkt aus der homogenen 4×4-Matrix gewonnen werden konnte, funktioniert dieses Verfahren bei der hier vorliegenden Effektorstellung nicht mehr. In der Berechnung der Effektorstellung wurden bereits bei der Aufstellung der einzelnen Transformationsmatrizen $\mathbf{D}_{i,i+1}$ die Zahlenwerte für die Winkel α_i eingesetzt, so daß α_i formelmäßig nicht mehr in Erscheinung tritt. Aus dem Verschwinden der α_i folgt aber nicht das Verschwinden der dualen Größe α_i , wie das folgende Beispiel deutlich zeigt:

Sei $\alpha = 0^\circ$, $\alpha l = \alpha + \varepsilon \cdot l = 0^\circ + \varepsilon \cdot 15$

Wegen $\alpha=0^\circ$ verschwindet $\sin(\alpha)$, nicht jedoch $\sin(\alpha l) = \sin(\alpha) + \varepsilon \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 0^\circ + \varepsilon \cdot 15$

Daher muß die Effektorstellung des ASEA-IR B6 in dualer Form explizit durch Multiplikation der einzelnen dualen 3×3 -Transformationsmatrizen berechnet werden; analoges gilt für die Form in Dualquaternionen.