1.2 Operationen auf Stellungsbeschreibungen

Häufig wird die Stellung eines Objekts nicht in Bezug auf das Basiskoordinatensystem (Weltkoordinatensystem) beschrieben, sondern bezüglich eines geeigneteren Koordinatensystems. Für viele Aufgaben ist es dann notwendig, solche relativen n in eine Stellungsangabeabsolute, d.h. auf das Basiskoordinatensystem bezogene Stellung umzurechnen.

So ist es beispielsweise sinnvoll, die unveränderliche Stellung eines Bohrlochs in einem Werkstück relativ zu einem Werkstückkoordinatensystem zu beschreiben. Liegen nun mehrere dieser Werkstücke auf einer Palette, so kann deren Lage wieder relativ zu einem Palettenkoordinatensystem angegeben werden. Die Stellung des Palettenkoordinatensystems wird bezüglich des Basiskoordinatensystems beschrieben (vgl. Abb. 1.5). Diese Art der Stellungsangabe hat den Vorteil, daß auch bei einer Bewegung der Palette die (anderen) relativen Stellungsbeschreibungen unverändert bleiben.

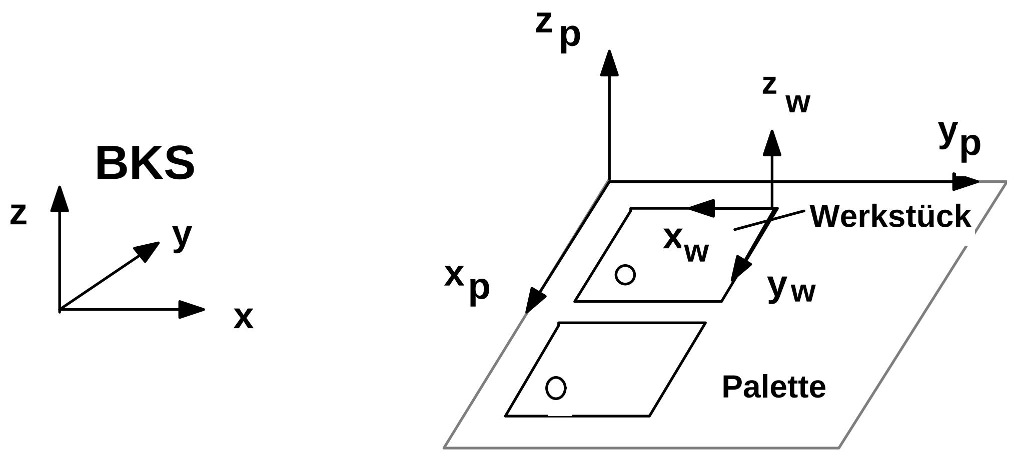

Abb. 1.5: Unterschiedliche Bezugsysteme zur relativen Stellungsangabe

Die Aufgabe besteht nun darin, z.B. die Stellung des Bohrlochs im zweiten Werkstück auf der Palette bezüglich des Basiskoordinatensystems aus den vorgegebenen relativen Stellungsbeschreibungen zu berechnen. Ein weiteres Problem, das in diesem Kapitel behandelt wird, ist die Umrechnung der verschiedenen Darstellungsformen von Stellungsbeschreibungen.

1.2.1 Umrechnung sechsdimensionaler Beschreibungsvektoren in homogene 4×4 Matrizen

Der sechsdimensionale Beschreibungsvektor ist nicht für die Verknüpfung von relativen Stellungsangaben geeignet. Diese Beschreibungsform muß daher zum Beispiel in eine homogene 4×4-Matrix umgewandelt werden. Zu diesem Zweck wird auf die aus der Geometrie bekannte Matrixform zur Darstellung von Drehungen zurückgegriffen; der

Drehwinkel wird dabei mit α bezeichnet und die Verwendung der entsprechenden Achse des zugrundeliegenden Bezugsystems als Drehachse durch **Rx** bzw. **Ry** bzw. **Rz** gekennzeichnet.

$$\mathbf{Rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Ry} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rz} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jede dieser zen stellt eine Drehung des Bezugskoordinatensystems in ein (fiktives) Objektkoordinatensystem und damit gleichzeitig eine Stellungsbeschreibung dar. Werden diese Rotationsmatrizen nun miteinander multipliziert, so ergibt sich dadurch eine Verknüpfung der einzelnen relativen Drehungen zu einer Gesamtdrehung bzw. Endstellung.

Wesentlich ist dabei, daß die richtige Multiplikationsreihenfolge der zen beachtet wird. Bei einer Interpretation der Multiplikation von links nach rechts bezieht sich die Drehung der jeweiligen Matrix immer auf das durch die linksstehende Matrix definierte Koordinatensystem; für die links außen stehende Rotationsmatrix ist dies das Basiskoordinatensystem, für alle anderen Matrizen die bis dahin durch die linksstehenden Matrizen erzeugte Gesamtstellung des fiktiven, aus dem Basiskoordinatensystem hervorgegangenen Koordinatensystems.

Wird dagegen die Multiplikation der Rotationsmatrizen von rechts nach links interpretiert, so bezieht sich jede Drehung auf die unveränderlichen Achsen des Basiskoordinatensystems. Dies zeigt, daß durchaus auch die unveränderlichen Achsen des Basiskoordinatensystems als Drehachsen der Orientierungswinkel W1, W2 und W3 verwendet werden können.

Als Beispiel hierfür betrachten wir nochmal die in Abschnitt 1.1.1 eingeführten Definitionen der Eulerwinkel und der durch Yaw–Pitch–Roll beschriebenen Winkel.

Bei der Definition der Eulerwinkel legten wir als Drehachsen für W1, W2 und W3 die z-Achse, die veränderte x-Achse und wiederum die veränderte z-Achse fest, so daß die Gesamtdrehung des Koordinatensystems beschrieben wird durch das Produkt

$$\mathbf{RS} = \mathbf{Rz}(W1)\bullet\mathbf{Rx}(W2)\bullet\mathbf{Rz}(W3).$$

Im Beispiel aus Abb. 1.1 ergibt dies

$$\mathbf{RS} = \mathbf{Rz}(90°)\bullet\mathbf{Rx}(90°)\bullet\mathbf{Rz}(-90°) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bei der Definition der Winkel Yaw–Pitch–Roll legten wir als Drehachsen für W1, W2 und W3 die Achsen des Bezugskoordinatensystems fest in der Reihenfolge z-Achse, y-Achse und dann x-Achse. Die Gesamtdrehung wird damit beschrieben durch das Produkt

$$\mathbf{RS} = \mathbf{Rx}(W3) \bullet \mathbf{Ry}(W2) \bullet \mathbf{Rz}(W1).$$

Im Beispiel aus Abb. 1.1 ergibt dies

$$\mathbf{RS} = \mathbf{Rx}(0°) \bullet \mathbf{Ry}(90°) \bullet \mathbf{Rz}(0°) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Werden nun die in den Spalten eins bis drei von **RS** enthaltenen x-, y- und z-Vektoren und die im sechsdimensionalen Vektor direkt enthaltenen Positionsangaben x, y, z zu einer 3×4-Matrix zusammengefaßt und durch eine vierte Zeile (0,0,0,1) zu einer homogenen 4×4-Matrix erweitert, so ergibt sich die dem sechsdimensionalen Vektor entsprechende Stellungsbeschreibung **S** in homogenen Koordinaten.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} & 3\times 3 & & x \\ & \text{Orientierungsteil} & & y \\ & \mathbf{RS} & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2 Umrechnung homogener 4×4-Matrizen in sechsdimensionale Beschreibungsvektoren

Umgekehrt kann natürlich auch eine Stellungsbeschreibung in Form einer homogenen 4×4-Matrix in einen sechsdimensionalen Beschreibungsvektor umgewandelt werden. Die Positionsangabe in den Matrixelementen S_{14}, S_{24} und S_{34} wird dabei direkt als x-, y-, und z-Wert in den sechsdimensionalen Vektor übernommen. Zur Berechnung der Winkelwerte W1, W2 und W3 wird der 3×3-Orientierungsteil **RS** der homogenen Matrix mit dem der Drehachsendefinition entsprechenden Produkt von Rotationsmatrizen gleichgesetzt.

Für die Euler-Winkel **Rz**(W1)•**Rx**(W2)•**Rz**(W3) führt dies z.B. zu folgender elementweise aufgeschriebenen (Matrix)-Gleichung:

1.1: $RS_{11} = \cos(W1)\cdot\cos(W3) - \sin(W1)\cdot\cos(W2)\cdot\sin(W3)$

1.2: $RS_{12} = -\cos(W1)\cdot\sin(W3) - \sin(W1)\cdot\cos(W2)\cdot\cos(W3)$

1.3: $RS_{13} = \sin(W1)\cdot\sin(W2)$

2.1: $RS_{21} = \sin(W1)\cdot\cos(W3) + \cos(W1)\cdot\cos(W2)\cdot\sin(W3)$

2.2: $RS_{22} = -\sin(W1)\cdot\sin(W3) + \cos(W1)\cdot\cos(W2)\cdot\cos(W3)$

2.3: $RS_{23} = -\cos(W1)\cdot\sin(W2)$

3.1: $RS_{31} = \sin(W2)\cdot\sin(W3)$

3.2: $RS_{32} = \sin(W2)\cdot\cos(W3)$

3.3: $RS_{33} = \cos(W2)$

Um die Auflösung dieser Matrixgleichung nach den Winkeln W1, W2 und W3 zu vereinfachen, wird die erste oder die dritte Rotationsmatrix (Randmatrizen) auf die andere Gleichungsseite gebracht. Dies erfolgt durch Multiplikation beider Gleichungsseiten mit der entsprechenden invertierten Randmatrix. Da die Rotationsmatrizen **Rx**, **Ry** und **Rz** orthonormal sind, ist die Inverse einer Rotationsmatrix **R** bekannterweise gerade ihre Transponierte: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$

Die so entstandene Matrixgleichung enthält immer genau eine Gleichung der Form

$$0 = a\cdot\sin(Wi) - b\cdot\cos(Wi)\ ,\ i\in\{1,2,3\},$$

aus der Wi berechnet werden kann:

$$\tan(Wi) = \sin(Wi)/\cos(Wi) = b/a \quad \Rightarrow \quad Wi = \arctan(b/a)$$

Da die arctan-Funktion mehrdeutig ist und der Hauptwert der Funktion nur Werte aus dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2[$ liefert, wird in der Robotik eine Funktion ATAN2 benutzt, die Werte aus dem Intervall $[-\pi/2, 3\cdot\pi/2[$ liefert. Zur eindeutigen Definition dieser Funktion werden Fallunterscheidungen verwendet, in denen getrennt Zähler Z und Nenner N als Argumente der Funktion verfügbar sein müssen:

$$\text{ATAN2}(Z, N) = \begin{cases} \arctan(Z/N) & \text{falls } N > 0 \\ \text{š}/2 & \text{falls } N = 0 \text{ und } Z > 0 \\ \text{beliebig} & \text{falls } N = 0 \text{ und } Z = 0 \\ -\text{š}/2 & \text{falls } N = 0 \text{ und } Z < 0 \\ \arctan(Z/N) + \text{š} & \text{falls } N < 0 \end{cases}$$

Bei der Implementierung dieser Funktion muß wie üblich darauf geachtet werden, daß wegen der endlichen Genauigkeit der Gleitpunktarithmetik die Abfragen auf Null ersetzt werden durch Abfragen auf eine rechnerabhängige untere Schranke.

Benutzen wir diese erweiterte ATAN2-Funktion, so erhalten wir zwei Lösungen für den zu berechnenden Winkel Wi:

$$Wi_1 = \text{ATAN2}(b,a) \text{ und } Wi_2 = \text{ATAN2}(-b,-a)$$

Diese beiden Lösungen unterscheiden sich gerade um π.

Mit der Bestimmung von einem Wi ist eine Unbekannte der Matrixgleichung bekannt und aus den ebenfalls existierenden Gleichungen sin(Wj) = … und cos(Wj) = … lassen sich die zwei noch unbekannten Winkel Wj mit Hilfe von ATAN2(sin(Wj), cos(Wj)) = Wj in Abhängigkeit von Wi berechnen.

Am Beispiel der Euler-Winkel soll diese Vorgehensweise verdeutlicht werden. Durch Invertierung der ersten Rotationsmatrix erhalten wir die Matrixgleichung

$$\mathbf{Rz}(W1)^{-1}\bullet\mathbf{RS} = \mathbf{Rx}(W2)\bullet\mathbf{Rz}(W3).$$

Elementweise ausgeschrieben ergeben sich folgende Einzelgleichungen:

1.1: $RS_{11}\cdot\cos(W1) + RS_{21}\cdot\sin(W1) = \cos(W3)$
1.2: $RS_{12}\cdot\cos(W1) + RS_{22}\cdot\sin(W1) = -\sin(W3)$
1.3: $RS_{13}\cdot\cos(W1) + RS_{23}\cdot\sin(W1) = 0$
2.1: $-RS_{11}\cdot\sin(W1) + RS_{21}\cdot\cos(W1) = \cos(W2)\cdot\sin(W3)$
2.2: $-RS_{12}\cdot\sin(W1) + RS_{22}\cdot\cos(W1) = \cos(W2)\cdot\cos(W3)$
2.3: $-RS_{13}\cdot\sin(W1) + RS_{23}\cdot\cos(W1) = -\sin(W2)$
3.1: $RS_{31} = \sin(W2)\cdot\sin(W3)$
3.2: $RS_{32} = \sin(W2)\cdot\cos(W3)$
3.3: $RS_{33} = \cos(W2)$

Die Gleichung 1.3 erlaubt die Berechnung von W1:

$$\sin(W1)/\cos(W1) = -RS_{13}/RS_{23} \quad \text{oder} \quad \sin(W1)/\cos(W1) = RS_{13}/(-RS_{23})$$
$$\Rightarrow W1_1 = \mathrm{ATAN2}(-RS_{13}\ ,\ RS_{23}) \quad \text{bzw.} \quad W1_2 = \mathrm{ATAN2}(RS_{13}\ ,\ -RS_{23})$$

Aus den Gleichungen 2.3 und 3.3 kann dann der Winkel W2 und aus den Gleichungen 1.1 und 1.2 der Winkel W3 bestimmt werden:

$$W2 = \mathrm{ATAN2}(RS_{13}\cdot\sin(W1) - RS_{23}\cdot\cos(W1)\ ,\ RS_{33})$$
$$W3 = \mathrm{ATAN2}(-RS_{12}\cdot\cos(W1) - RS_{22}\cdot\sin(W1)\ ,\ RS_{11}\cdot\cos(W1) + RS_{21}\cdot\sin(W1))$$

Betrachten wir zum Schluß am Beispiel von W1 den Sonderfall $RS_{13}=RS_{23}=0$, für den $\mathrm{ATAN2}(RS_{13},RS_{23}) = \mathrm{ATAN2}(0,0)$ nicht definiert ist. In diesem Fall ist W1 beliebig wählbar, die Gleichung 1.3 bleibt mit "0=0" immer korrekt erfüllt. Wegen der Orthonormalität folgt aus $RS_{13}=RS_{23}=0$ sofort $RS_{33}=\pm1$, $RS_{31}=RS_{32}=0$, $RS_{11}=\pm RS_{22}$, $RS_{21}=\mp RS_{12}$. Die Rotationsmatrix **RS** hat also folgende Form:

$$\mathbf{RS} = \begin{bmatrix} \pm RS_{22} & RS_{12} & 0 \\ \mp RS_{12} & RS_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}$$

Dies bedeutet geometrisch, daß die z-Richtungen des Bezugs- und des Objektkoordinatensystems, eventuell bis auf das Vorzeichen, übereinstimmen. Diese Orientierung kann nur erreicht werden, wenn bei der zweiten Drehung um die veränderte x-Achse entweder W2=0° oder W2=180° ist. Diese Werte ergeben sich auch genau aus der Formel für W2. In diesem Fall kann dann bei der dritten Drehung um die z-Achse die erste Drehung um

W1 vollständig rückgängig gemacht werden. Es ist offensichtlich gleichgültig, wie groß W1 gewählt wurde, da mit W3 dann dieser Winkelbetrag ausgeglichen werden kann.

Aufgrund der Orthonormalität von **RS** läßt sich sehr einfach zeigen, daß der Sonderfall ATAN2(0,0) bei der Berechnung von W2 und W3 nicht auftreten kann.
Angenommen, die Gleichung 1.3 "$RS_{13}\cdot\cos(W1) + RS_{23}\cdot\sin(W1) = 0$" sei korrekt erfüllt und W2 = ATAN2(0,0), d.h. $RS_{13}\cdot\sin(W1) - RS_{23}\cdot\cos(W1) = 0$ und $RS_{33} = 0$; dann folgt: $(RS_{13}\cdot\cos(W1) + RS_{23}\cdot\sin(W1))^2 + (RS_{13}\cdot\sin(W1) - RS_{23}\cdot\cos(W1))^2 + RS33^2 = 0$ und dies führt zum Widerspruch $RS_{13}^2+RS_{23}^2+RS_{33}^2 = 0$!

Anhand dieses noch sehr überschaubaren Beispiels soll durch die Erläuterung einer zweiten Variante zur Berechnung der Wi verdeutlicht werden, wie stark die Auswahl geeigneter Bestimmungsgleichungen die Handhabbarkeit und Fehlersicherheit der Berechnung beeinflußt.

Wären wir von der ursprünglichen Matrixgleichung ausgegangen, so wäre die Einzelgleichung 3.3

$RS_{33}=\cos(W2)$

die einzige Gleichung, in der nur eine Unbekannte vorkommt. Wir könnten also mit der Beziehung

$\sin(W2) = \pm\sqrt{1-RS_{33}^2}$

W2 berechnen:

$W2 = \mathrm{ATAN2}(\pm\sqrt{1-RS_{33}^2}\ , RS_{33})$

Aus 1.3 und 2.3: $W1 = \mathrm{ATAN2}(RS_{13}/\sin(W2)\ , -RS_{23}/\sin(W2))$
Aus 3.1 und 3.2: $W3 = \mathrm{ATAN2}(RS_{31}/\sin(W2)\ , RS_{32}/\sin(W2))$

Folgende Fehler passieren in diesem Zusammenhang sehr häufig:

1. Durch fälschliches Kürzen von sin(W2) werden folgende Formeln hergeleitet:

   $W1 = \mathrm{ATAN2}(RS_{13}\ , -RS_{23})$ $\quad$ $W3 = \mathrm{ATAN2}(RS_{31}\ , RS_{32})$

   Im ATAN2 dürfen jedoch *nur positive Werte* gekürzt werden, andernfalls ergibt sich ein um 180° versetztes Ergebnis.

2. Weiterhin kann sin(W2) im Nenner den Wert Null annehmen

   d.h. im Beispiel: $RS_{33}=\pm1 \Rightarrow RS_{13}=RS_{23}=RS_{31}=RS_{32}=0$ bzw. ATAN2(0,0) für W1 und W3. In diesem Fall kann W1 und W3 nicht aus den abgeleiteten Bestimmungsgleichungen berechnet werden. Aus den verbleibenden nichttrivialen Gleichungen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2 ist nur eine Aussage über sin(W1±W3) und über cos(W1±W3) möglich und einer der beiden Winkel W1 oder W3 ist beliebig wählbar.

Offensichtlich ist der erste Ansatz günstiger, insbesondere was die Analyse der Sonderfälle betrifft.

1.2.3 Operationen auf homogenen 4×4-Matrizen

Koordinatentransformation von Punkten

Die Transformation von Punktkoordinaten $P_2(x_2, y_2, z_2)$, bezogen auf ein Objekt, das durch eine Euler-Rotation **RS** = **Rz**(W1)•**Rx**(W2)•**Rz**(W3) und eine Translation $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)^T$ aus dem Basiskoordinatensystem herausbewegt wurde, in die Basiskoordinaten $P_1(x_1,y_1,z_1)$ wird in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten so durchgeführt:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{RS} \\ \text{(vgl. Abschnitt 1.2.1)} \\ \ \end{bmatrix}}_{\text{Euler-Rotation}} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\text{Translation}} \quad \text{oder} \quad P_1 = \mathbf{RS} \bullet P_2 + \mathbf{v}$$

In homogenen Koordinaten ist folgende vereinfachte Schreibweise möglich:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & \overset{\text{Euler-Rotation}}{} & & \overset{\text{Translation}}{v_x} \\ & \mathbf{RS} & & v_y \\ & & & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{homogene 4×4-Matrix } \mathbf{Obj}} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad P_1 = \mathbf{Obj} \bullet P_2$$

Obj ist die Stellungsbeschreibung des Objektkoordinatensystems bezüglich des Basiskoordinatensystems. Wird – im Vorgriff auf eine im folgenden noch ausführlicher erläuterte Notationsform – das jeweils zugrundeliegende Bezugsystem für Punkt- und Vektorkoordinaten bzw. Stellungsangaben als hochgestellter Index links oben mitgeführt, so gilt für

$P_1 = \mathbf{Obj} \bullet P_2$:

$${}^{BKS}P_1 = {}^{BKS}\mathbf{Obj} \bullet {}^{Obj}P_2$$

Diese Regel zur Um- undBerechnung von Vektorkoordinaten in beliebige Bezugsysteme ist vollkommen identisch mit der im übernächsten Abschnitt aufgeführten Verknüpfungsregel für relative Stellungsbeschreibungen.

Koordinatentransformation von freien Vektoren

Die (Euler-Rotation und Translation **v**) eines Vektors $\mathbf{a}=(a_x , a_y , a_z , 0)^T$ in homogenen Koordinaten hat folgendes Aussehen:

$$\begin{bmatrix} a_{xneu} \\ a_{yneu} \\ a_{zneu} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & v_x \\ & \mathbf{RS} & & v_y \\ & & & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{homogene } 4\times4\text{-Matrix } \mathbf{Obj}} \bullet \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad {}^{BKS}\mathbf{a}_{neu} = {}^{BKS}\mathbf{Obj} \bullet {}^{Obj}\mathbf{a}$$

An diesen drei Gleichungen wird die Idee der homogenen Erweiterung nochmal deutlich. Durch eine geeignete Modifikation der dreidimensionalen Darstellung von Vektoren und Punkten kann der in kartesischen Koordinaten isoliert stehende Translationsvektor mit der Rotation zu einer einzigen Matrix zusammengefaßt werden. Sollen homogene en wie freie en [Bronstein 74] translationsinvariant sein, so darf nur eine Erweiterung mit 0 gewählt werden. Um sicherzustellen, daß Vektoren durch die Transformationsmatrix wieder auf Vektoren abgebildet werden, müssen die drei ersten Elemente der vierten (Erweiterungs-)-Zeile der Transformationsmatrix Null sein. Da in der Roboterkinematik auch keine Skalierungsfunktionen notwendig sind, wird zur Beschreibung von Punkten im homogenen Raum und als letztes Element der Erweiterungszeile die 1 gewählt.

Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen

Noch deutlicher sichtbar werden die Vorteile der homogenen 4×4-Matrix gegenüber der Darstellung in kartesischen Koordinaten bei der Verknüpfung zweier Stellungsangaben.

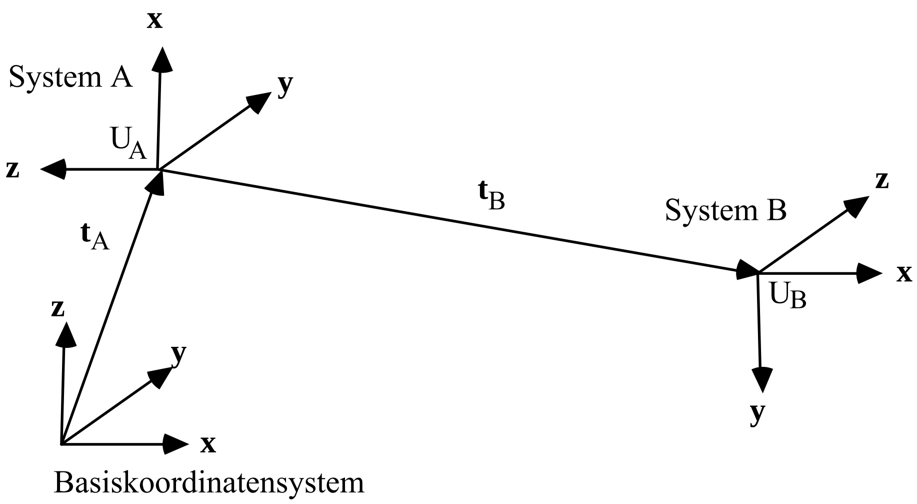

Abb. 1.6: Relativ definierte Stellungsangaben

Sei **A** eine 3×3-Rotationsmatrix zur Definition der Orientierung des Systems A bezüglich des Basiskoordinatensystems (vgl. Abb. 1.6) und **B** eine 3×3-Rotationsmatrix zur Definition der Orientierung des Systems B bezüglich des Systems A. Seien weiterhin $\mathbf{t}_A$ und $\mathbf{t}_B$ die Translationsvektoren vom Ursprung des jeweiligen Bezugsystems zum Objektursprung U_A bzw. U_B. Dann hat die Beschreibung des Systems B, bezogen auf das Basiskoordinatensystem, folgendes Aussehen:
A•B ergibt die Orientierung des Systems B und
$\mathbf{A} \bullet \mathbf{t}_B + \mathbf{t}_A$ ergibt den Positionsvektor vom Basiskoordinatensystem zum Ursprung U_B.

Wird dagegen die Stellung mit den homogenen 4×4-Matrizen **HA** und **HB** beschrieben, in denen außer der Orientierung auch die Translation enthalten ist, so ergibt sich die Stellung des Objekts B, bezogen auf das Basiskoordinatensystem, durch eine einfache Matrixmultiplikation **HA•HB**.

Die Anzahl von Rechenoperationen ist in beiden Fällen die gleiche, aber der Aufschreibungsaufwand und die formale Komplexität bei der Verknüpfung mehrstufig definierter Objektstellungen verringert sich bei der Verwendung homogener 4×4-Matrizen erheblich.

Gerade diese mehrstufige Definition von en ist für die von entscheidender Bedeutung. Sobald das "Teach"-Niveau verlassen wird, müssen bei den heute üblichen Roboterprogrammiersystemen alle Objektdaten wertemäßig erfaßt werden. Diese Werte nun aber direkt auf das Basiskoordinatensystem zu beziehen, wäre ein sehr mühseliges und unsinniges Unterfangen, weil z.B. beim Transport einer beladenen Palette nicht nur das Koordinatensystem der Palette, sondern auch alle Stellungsbeschreibungen für sämtliche auf der Palette befindlichen Objekte neu berechnet werden müßten. Ist dagegen die Palettenbestückung zum Palettenkoordinatensystem definiert, so genügt die Neuberechnung dieses Systems, um die Information über den Zustand der Roboterumgebung aktuell zu halten.

Die Möglichkeit der Verkettung von Stellungsbeschreibung Verkettung von -en durch einfache Matrixmultiplikationen ist einerseits sehr leistungsfähig, andererseits aber auch fehlerträchtig, wenn der Benutzer sich nicht ständig völlige Klarheit über die benutzten Bezugsysteme schafft. Eine Verkettung von Stellungsbeschreibungen durch Matrixmultiplikationen ist natürlich nur dann sinnvoll und erlaubt, wenn die einzelnen Koordinatensysteme sich direkt aufeinander beziehen.

Für Fälle, in denen keine Eindeutigkeit besteht, welches Bezugsystem der Stellungsangabe zugrundeliegt, wird das Bezugskoordinatensystem als hochgestellter Index links über dem Namen des Objektkoordinatensystems angegeben. Als Abkürzungen benutzen wir B für ein beliebiges Bezugsystem und BKS für das Basis- bzw. Weltkoordinatensystem.

: Eine multiplikative Verknüpfung von relativen Stellungsbeschreibungen ist nur dann sinnvoll, wenn das Objektkoordinatensystem S_{i-1} Bezugsystem für das nachfolgende Objektkoordinatensystem S_i ist.

formal: $\prod_{i=1}^{n} S_i$ ist sinnvoll $\Leftrightarrow$ $S_i = {}^{S_{i-1}}S_i$ mit S_0=B, $1 \leq i \leq n$

Für das Beispiel (vgl. Abb. 1.7) wurden folgende Werte gewählt:

Das Objektkoordinatensystem S_1 sei durch eine Transformation $((3,3,0)^T$, **Rz**(90°)) aus dem Bezugsystem **B** entstanden: ${}^{B}\mathbf{S}_1$
Das Objektkoordinatensystem S_2 sei durch eine Transformation $((-5,-5,0)^T$, **Rz**(-180°)) aus dem Koordinatensystem S_1 entstanden: ${}^{S_1}\mathbf{S}_2$
Gesucht ist nun das Objektkoordinatensystem $\mathbf{S}_2$ bezogen auf **B**: ${}^{B}\mathbf{S}_2$.
Das Ergebnis der Berechnung

${}^{B}\mathbf{S}_2 = {}^{B}\mathbf{S}_1 \bullet {}^{S_1}\mathbf{S}_2$

ist der Abb. 1.7 zu entnehmen.

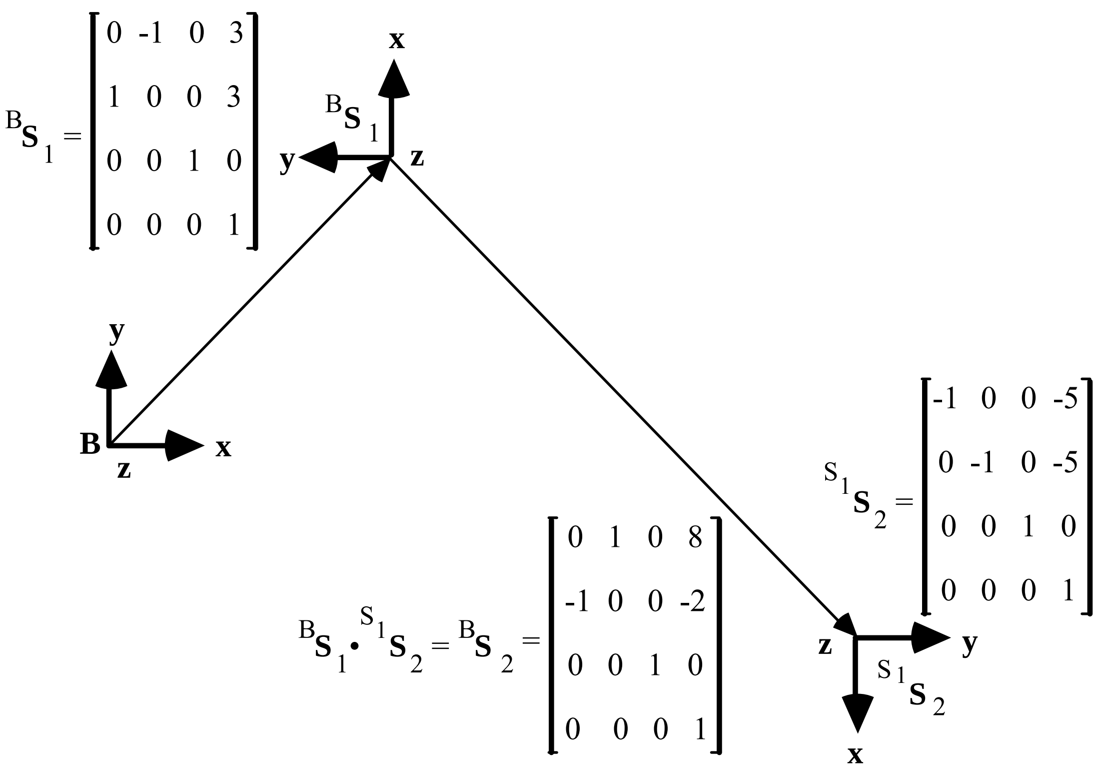

Abb. 1.7: Verknüpfung relativ definierter Stellungsangaben

Häufig besteht auch das umgekehrte Problem: Bekannt sind die beiden absoluten Stellungsbeschreibungen $^{B}\mathbf{S}_1$ und $^{B}\mathbf{S}_2$ und gesucht wird die relative Stellungsbeschreibung $^{S_1}\mathbf{S}_2$. Diese ist formal leicht zu bestimmen.

Aus $^{B}\mathbf{S}_2 = {}^{B}\mathbf{S}_1 \bullet {}^{S_1}\mathbf{S}_2$ folgt $^{B}\mathbf{S}_1^{-1} \bullet {}^{B}\mathbf{S}_2 = {}^{S_1}\mathbf{S}_2$.

Wir müssen hierzu die Inverse der homogenen Matrix $^{B}\mathbf{S}_1$ bestimmen. Ebenso wie die Inversen der Rotationsmatrizen **Rx**, **Ry** und **Rz** läßt sich auch die Inverse einer homogenen 4×4-Matrix **H** formelmäßig leicht angeben. Bezeichne $\mathbf{h}_i$ die i-te Spalte der Matrix **H** und **R** den linken oberen 3×3-Rotationsanteil von **H**, dann gilt:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & -\mathbf{h}_1 \bullet \mathbf{h}_4 \\ & \mathbf{R}^T & & -\mathbf{h}_2 \bullet \mathbf{h}_4 \\ & & & -\mathbf{h}_3 \bullet \mathbf{h}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Nachweis, daß $\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \bullet \mathbf{H} = \mathbf{1}$ gilt, ist einfach zu führen.Im wesentlichen muß dabei nur auf die Orthonormiertheitsbedingung von **R** zurückgegriffen werden.

Interessant ist auch die geometrische Interpretation der Inversen. Es gilt

${}^{B}\mathbf{S}_1{}^{-1} = {}^{S_1}\mathbf{B}$,

d.h. Bezugs- und Objektkoordinatensystem vertauschen ihre Rolle. Nun sehen wir auch, daß die obige Bestimmungsgleichung

$${}^{S_1}\mathbf{S}_2 = {}^{B}\mathbf{S}_1{}^{-1} \bullet {}^{B}\mathbf{S}_2$$

unserer angegebenen Verknüpfungsregel genügt, wenn wir diese Beziehung für die Inverse ausnützen:

$${}^{S_1}\mathbf{S}_2 = {}^{S_1}\mathbf{B} \bullet {}^{B}\mathbf{S}_2$$

Auf beiden Seiten ist das Bezugsystem S_1 und die multiplikative Verknüpfung auf der rechten Seite ist sinnvoll, da sich ${}^{B}\mathbf{S}_2$ ja gerade auf B bezieht.

Berechnen wir noch für unser Beispiel in Abb. 1.7 die Inverse

$${}^{B}\mathbf{S}_1{}^{-1} = {}^{S_1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so sehen wir, daß das Ergebnis direkt aus dem Bild verifiziert werden kann.

Zerlegung homogener 4×4-Matrizen in Rotations- und Translationsanteile

Gelegentlich ist die Aufspaltung einer homogenen 4×4- **T** in ihren Rotations- und Translationsanteil sinnvoll. Diese Aufspaltung hat folgendes Aussehen:
$\mathbf{T} = \mathbf{Tt} \bullet \mathbf{TR}$,
wobei **Tt** eine Transformationsmatrix ist, die nur den Translationsanteil von **T** enthält, und **TR** eine Transformationsmatrix darstellt, die nur den Rotationsanteil von **T** beinhaltet.

Beispiel:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{liefert:} \quad \mathbf{Tt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{TR} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist klar, daß im allgemeinen $\mathbf{T} = \mathbf{Tt} \bullet \mathbf{TR} \neq \mathbf{TR} \bullet \mathbf{Tt}$ gilt, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Die Aufspaltung von **T** zeigt, daß die Translation einer Transformationsmatrix immer im ursprünglich vorliegenden Bezugsystem ausgeführt wird und nicht bezüglich des durch den Rotationsanteil veränderten Bezugsystems.

Soll die Translation im veränderten Bezugsystem durchgeführt werden, so muß die gesuchte Transformationsmatrix durch Multiplikation der Matrizen **TR** und **Tt** ermittelt werden: $\mathbf{T} = \mathbf{TR} \bullet \mathbf{Tt}$.

1.2.4 Umrechnung homogener 4×4-Matrizen in duale 3×3-Matrizen

Der 3×3-Rotationsanteil der homogenen 4×4-Matrix wird unverändert als Primärteil der dualen Matrix übernommen: $Dp_{ij} = H_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$.

Nach dem in Abschnitt 1.1.3 Gesagten beschreibt der Matrixspalte den Momentenvektor der durch den Primärteil als Orientierungsvektor gekennzeichneten Geraden. Ein wesentlicher Vorteil des Momentenvektors im Gegensatz zu dem die Raumposition der Geraden direkt wiedergebenden Lotvektor besteht darin, daß er durch Kreuzproduktbildung eines beliebigen Punktes der Geraden mit dem Orientierungsvektor der Geraden gewonnen werden kann. Wir erhalten also, da der in der 4. Spalte der homogenen 4×4-Matrix enthaltene Raumpunkt als Ursprung des Koordinatensystems Bestandteil aller 3 Geraden ist, die gesuchten Sekundärwerte durch:

$$(Ds_{1i} , Ds_{2i} , Ds_{3i})^T = (H_{14} , H_{24} , H_{34})^T \times (H_{1i} , H_{2i} , H_{3i})^T$$

Ein Beispiel für diese Umformung liefert der Vergleich von Bild 1.2 und Bild 1.4 .

1.2.5 Umrechnung dualer 3×3-Matrizen in homogene 4×4-Matrizen

Der Primärteil der dualen Matrix ist identisch mit dem 3×3-Rotationsanteil der homogenen 4×4-Matrix: $H_{ij} = Dp_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$;
die 4. Zeile einer homogenen Matrix **H** hat immer die Form (0,0,0,1).
Es muß also nur noch der Ursprung des zu beschreibenden Koordinatensystems bestimmt werden. Dies ist möglich, indem der Schnittpunkt zweier durch die Spalten der dualen Matrix **D** definierter Geraden bestimmt wird. Jede dieser Gerade läßt sich in Parameterform beschreiben durch $\mathbf{l}+\lambda\cdot\mathbf{o}$, $\lambda\in\Re$ (vgl. Abschnitt 1.1.3). In unserem Fall gilt $\mathbf{l}_i = \mathbf{o}_i \times \mathbf{m}_i$, wobei $\mathbf{o}_i$ der im Primärteil einer Spalte enthaltene Orientierungsvektor und $\mathbf{m}_i$ der im Sekundärteil enthaltene Momentenvektor ist.

Für den Schnittpunkt P zweier Geraden g_1 und g_2 gilt, sofern der Schnittpunkt existiert:

$$\mathbf{l}_1 + \lambda_1\cdot\mathbf{o}_1 = \mathbf{l}_2 + \lambda_2\cdot\mathbf{o}_2 .$$

Diese Gleichung ist mit 3 Zeilen, aber nur 2 Variablen λ_1 und λ_2 in der Regel überbestimmt; da für eine Stellungsbeschreibung dieser Schnittpunkt jedoch sicher existiert, werden Ranganalysen für das lineare Gleichungssystem in λ_1 und λ_2 überflüssig. Durch Multiplikation mit dem Vektor $\mathbf{o}_1$ (Skalarprodukt der Vektoren) verschwindet λ_2 und es kann folgende Lösungsformel hergeleitet werden:

$$\mathbf{l}_1 \bullet \mathbf{o}_1 + \lambda_1 \cdot \mathbf{o}_1 \bullet \mathbf{o}_1 = \mathbf{l}_2 \bullet \mathbf{o}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{o}_2 \bullet \mathbf{o}_1$$

Mit $\mathbf{l}_1 = \mathbf{o}_1 \times \mathbf{m}_1$, $(\mathbf{o}_1 \times \mathbf{m}_1) \bullet \mathbf{o}_1 = 0$, $\mathbf{o}_1 \bullet \mathbf{o}_1 = 1$ und $\mathbf{o}_2 \bullet \mathbf{o}_1 = 0$ folgt :

$$\lambda_1 = (\mathbf{o}_2 \times \mathbf{m}_2) \bullet \mathbf{o}_1$$

Wegen der Verwendung von $\mathbf{o}_2 \bullet \mathbf{o}_1 = 0$ gilt diese Lösungsformel von λ_1 nur, wenn die Geraden orthogonal sind, und deshalb $\mathbf{o}_2 \bullet \mathbf{o}_1 = 0$ gilt !

Damit ergeben sich die restlichen gesuchten H-Werte:

$$\begin{aligned}(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T &= \mathbf{o}_1 \times \mathbf{m}_1 + ((\mathbf{o}_2 \times \mathbf{m}_2) \bullet \mathbf{o}_1) \cdot \mathbf{o}_1 = \\ &= (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \\ &+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \bullet (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \\ &\cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T\end{aligned}$$

Diese Transformationsberechnungen werden am Beispiel der Bilder 1.2 und 1.4 explizit vorgeführt:

Aus Bild 1.2 ist abzulesen: $(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T = (u_x, u_y, u_z)^T$

Die Lösungsformel liefert mit den Zahlenwerten aus Bild 1.4:

$$\begin{aligned}&(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T \\ &= (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \\ &+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \bullet (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \\ &\cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \\ &= (0, 0, -1)^T \times (-u_y, u_x, 0)^T + (((0, 1, 0)^T \times (-u_z, 0, u_x)^T) \bullet (0, 0, -1)^T) \cdot (0, 0, -1)^T \\ &= (u_x, u_y, 0)^T + ((u_x, 0, u_z)^T \bullet (0, 0, -1)^T) \cdot (0, 0, -1)^T \\ &= (u_x, u_y, 0)^T + (-u_z) \cdot (0, 0, -1)^T = (u_x, u_y, u_z)^T\end{aligned}$$

1.2.6 Operationen auf dualen 3×3-Matrizen

KoordinatentTransformation von Punktkoordinaten

Gegeben sei ein Punkt $P=(p_x, p_y, p_z)^T$, der durch eine duale 3×3-Matrix $\mathbf{D}=\mathbf{Dp}+\varepsilon\cdot\mathbf{Ds}$ in den Punkt P_{neu} transformiert werden soll. Da duale 3×3-Matrizen der Liniengeometrie und nicht der Punktgeometrie zuzuordnen sind, ist eine Punkttransformation durch duale Matrizen nur über Umwege möglich; z.B. kann der Punkt P als Ursprung in ein Koordinatensystem, dargestellt als duale 3×3-Matrix, eingebettet werden oder die duale Transformationsmatrix wird in eine homogene 4×4-Matrix umgeformt. Mit der zweiten Variante ergibt sich die vierte Spalte der zu **D** äquivalenten 4×4-Matrix **H** laut Abschnitt 1.2.5 zu

$$\begin{aligned}(H_{14}, H_{24}, H_{34})^T &= \\ &= (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T\end{aligned}$$

$$+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \bullet (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T$$

und die neuen Punktkoordinaten sind über eine Transformation des Punktes P nach den Regeln bei homogenen 4×4-Transformationsmatrizen gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{neu} &= \mathbf{H}\bullet(p_x, p_y, p_z, 1)^T = \mathbf{Dp}\bullet(p_x, p_y, p_z)^T + (H_{14}, H_{24}, H_{34})^T \\ &= \mathbf{Dp}\bullet(p_x, p_y, p_z)^T + (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \times (Ds_{11}, Ds_{21}, Ds_{31})^T \\ &+ (((Dp_{12}, Dp_{22}, Dp_{32})^T \times (Ds_{12}, Ds_{22}, Ds_{32})^T) \bullet (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T) \\ &\cdot (Dp_{11}, Dp_{21}, Dp_{31})^T \end{aligned}$$

Koordinatentransformation von freien en und GTransformation einer Raumgeraden

Ein freier Vektor $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)^T$ wird durch eine duale 3×3-Matrix $\mathbf{D}=\mathbf{Dp}+\varepsilon\cdot\mathbf{Ds}$ in völliger Analogie zu homogenen 4×4-Matrizen transformiert, d.h.

$$\mathbf{v}_{neu} = \mathbf{Dp}\bullet\mathbf{v} \quad \{\equiv \mathbf{H}\bullet(v_x, v_y, v_z, 0)^T\}$$

Eine Gerade g – dargestellt durch eine dualen 3×1-Vektor $(gd_x, gd_y, gd_z)^T$, der den normierten Richtungsvektor $(gdp_x, gdp_y, gdp_z)^T$ und das Moment $(gds_x, gds_y, gds_z)^T$ der Geraden beinhaltet – wird durch eine duale 3×3-Matrix $\mathbf{D}=\mathbf{Dp}+\varepsilon\cdot\mathbf{Ds}$ in folgender Weise transformiert:

$$g_{neu} = \mathbf{D}\bullet(gd_x, gd_y, gd_z)^T =$$

$$= \mathbf{DP}\bullet(gdp_x, gdp_y, gdp_z)^T + \varepsilon\cdot\{\mathbf{DP}\bullet(gds_x, gds_y, gds_z)^T + \mathbf{DS}\bullet(gdp_x, gdp_y, gdp_z)^T\}$$

Der Nachweis, daß die Formel für g_{neu} tatsächlich die durch eine Transformation $\mathbf{D}$ aus der Geraden g entstandene neue Gerade beschreibt, wird im nächsten Abschnitt bewiesen; g wird dazu als eine Spalte einer duale 3×3-Matrix in ein beliebiges Koordinatensystem eingebettet.

Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen

Wie wir im folgenden zeigen, läßt sich die Verknüpfung von Stellungsbeschreibungen mit dualen 3×3-Matrizen auf die Multiplikation dieser 3×3-Matrizen zurückführen. Dabei gelten hinsichtlich der Bezugsysteme die in 1.2.1 und 1.2.3 gemachten Aussagen. Wird der Primärteil einer dualen 3×3-Matrix isoliert betrachtet, so zeigt sich die Identität mit der 3×3-Rotationsinformation der homogenen 4×4-Matrix. Auch die Multiplikation bei dualen Matrizen ist für den Primärteil identisch mit der Multiplikation von 3×3-Rotationsanteilen aus homogenen 4×4-Matrizen. Insofern gelten für den Primärteil der dualen 3×3-Matrix alle für den Rotationsanteil der homogenen 4×4-Matrix nachgewiesenen Gesetzmäßigkeiten (z.B. Orthonormiertheit invariant gegenüber Multiplikation). Es muß lediglich noch gezeigt werden, daß durch die 3×3-Matrixmultiplikation bei dualen Matrizen der resultierende Sekundärteil eine sinnvolle, d.h. eine der durch Stellungsverknüpfung neu entstandenen Stellung entsprechende Aussage liefert.

Es seien **F**, **G** und **H** homogene 4×4-Matrizen mit der Eigenschaft:

$$\mathbf{F}\bullet\mathbf{G} = \mathbf{H}$$

Eine Aufspaltung von **F** in den 3×3-Rotationsanteil **FR** und den 3×1-Translationsanteil **Ft** und von **G** in den Rotationsanteil **GR** und den Translationsanteil **Gt** führt für **H** = **F•G** zum Rotationsanteil **HR** = **FR•GR** und zum Translationsvektor **Ht** = **FR•Gt**+**Ft**.

Bei einem Übergang zu den zugehörigen dualen 3×3-Matrizen **DF** (entspricht **F**), **DG** (entspricht **G**) und **DH** (entspricht **H**) zeigt sich mit **F•G** = **H** sofort die Identität der Primärteile von

$$\mathbf{DFp}\bullet\mathbf{DGp} = \mathbf{FR}\bullet\mathbf{GR} \text{ und } \mathbf{DHp} = \mathbf{HR} = \mathbf{FR}\bullet\mathbf{GR}.$$

Im folgenden wird die Gleichheit der Sekundärteile von **DF•DG** und **DH** nachgewiesen; dazu ist entsprechend der Multiplikationsvorschrift für duale Matrizen (vgl. Abschnitt 1.1.3) zu zeigen:

(Primärteil von **DF**)•(Sekundärteil von **DG**) + (Sekundärteil von **DF**)•(Primärteil von **DG**) = Sekundärteil von **DH**

Entsprechend der Umformungsvorschrift von homogenen zu dualen Matrizen (Abschnitt 1.2.4) und mit $\mathbf{f}_i$ und $\mathbf{g}_i$ als Bezeichnung der Matrixspalten von **FR** und **GR** lautet obige Gleichung:

$$\mathbf{FR}\bullet(\mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_1\ \ \mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_2\ \ \mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_3) + (\mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_2\ \ \mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_3)\bullet\mathbf{GR}$$
$$= ((\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt}+\mathbf{Ft})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_1)\ \ (\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt}+\mathbf{Ft})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_2)\ \ (\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt}+\mathbf{Ft})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_3))$$

Bei spaltenweiser Betrachtung läßt sich diese Matrixgleichung reduzieren zu

$$\mathbf{FR}\bullet(\mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_i) + (\mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_1\ \mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_2\ \mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_3)\bullet\mathbf{g}_i = (\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt}+\mathbf{Ft})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_i) \quad i=1,2,3$$

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren **Ft**×**v** kann durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation **K•v** dargestellt werden, wobei die Matrix **K** als sogenannte Kreuzproduktmatrix [Glavina 85] des Vektors **Ft** folgende Form hat:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -Ft_z & Ft_y \\ Ft_z & 0 & -Ft_x \\ -Ft_y & Ft_x & 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt}+\mathbf{Ft})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_i) = (\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_i) + \mathbf{Ft}\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_i) = \mathbf{FR}\bullet(\mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_i) + \mathbf{K}\bullet\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_i$$

$= \mathbf{FR}\bullet(\mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_i) + (\mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_1\ \mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_2\ \mathbf{Ft}\times\mathbf{f}_3)\bullet\mathbf{g}_i \quad i=1,2,3$

Da **FR** eine Orthonormalmatrix ist, können Rotation und Kreuzproduktbildung zweier Vektoren vertauscht werden: $(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{Gt})\times(\mathbf{FR}\bullet\mathbf{g}_i) = \mathbf{FR}\bullet(\mathbf{Gt}\times\mathbf{g}_i)$

Hiermit ist die Äquivalenz der Sekundärteile gezeigt und damit der Nachweis erbracht, daß die 3×3-Matrixmultiplikation eine sinnvolle Verknüpfungsoperation für duale Matrizen definiert.

Die Inverse einer dualen 3×3-Matrix **D**, die zur Darstellung eines kartesischen Koordinatensystems verwendet wird, lautet:

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$$

Zum Nachweis, daß $\mathbf{D}^T\bullet\mathbf{D} = \mathbf{D}\bullet\mathbf{D}^T = \mathbf{E}$ gilt, muß außer auf die Orthonormiertheit des Primärteils auch auf die Tatsache zurückgegriffen werden, daß sich alle drei Geraden in einem Punkt U schneiden.

a) $\mathbf{D}^T\bullet\mathbf{D} = (\mathbf{Dp}^T + \varepsilon\cdot\mathbf{Ds}^T)\bullet(\mathbf{Dp} + \varepsilon\cdot\mathbf{Ds}) = \mathbf{Dp}^T\bullet\mathbf{Dp} + \varepsilon\cdot(\mathbf{Dp}^T\bullet\mathbf{Ds}+\mathbf{Ds}^T\bullet\mathbf{Dp})$

Primärteil $\mathbf{Dp}^T\bullet\mathbf{Dp} = \mathbf{E}$ wegen Orthonormiertheit des Primärteils **Dp** (vgl. Abschnitt 1.2.5)

Mit den Bezeichnungen $\mathbf{o}_i$, $\mathbf{m}_i$ und **u** für Orientierungs-, Momenten- und Ursprungsvektor und mit $\mathbf{m}_i = \text{Lot}\times\mathbf{o}_i = \mathbf{u}\times\mathbf{o}_i$ (vgl. Abschnitt 1.1.3) gilt für jedes Element s_{ij} des Sekundärteils $\mathbf{Dp}^T\bullet\mathbf{Ds}+\mathbf{Ds}^T\bullet\mathbf{Dp}$:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \text{(i-te Primärspalte von } \mathbf{D})\bullet\text{(j-te Sekundärspalte von } \mathbf{D}) \\ &\quad + \text{(i-te Sekundärspalte von } \mathbf{D})\bullet\text{(j-te Primärspalte von } \mathbf{D}) \\ &= \mathbf{o}_i\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{o}_j) + (\mathbf{u}\times\mathbf{o}_i)\bullet\mathbf{o}_j = (\mathbf{o}_j\times\mathbf{o}_i)\bullet\mathbf{u} - (\mathbf{o}_j\times\mathbf{o}_i)\bullet\mathbf{u} = 0 \quad \text{[Brand 57]} \end{aligned}$$

Damit gilt: $\mathbf{D}^T\bullet\mathbf{D} = \mathbf{Dp}^T\bullet\mathbf{Dp} + \varepsilon\cdot(\mathbf{Dp}^T\bullet\mathbf{Ds}+\mathbf{Ds}^T\bullet\mathbf{Dp}) = \mathbf{E} + \varepsilon\cdot\mathbf{0} = \mathbf{E}$

b) $\mathbf{D}\bullet\mathbf{D}^T = (\mathbf{Dp} + \varepsilon\cdot\mathbf{Ds})\bullet(\mathbf{Dp}^T + \varepsilon\cdot\mathbf{Ds}^T) = \mathbf{Dp}\bullet\mathbf{Dp}^T + \varepsilon\cdot(\mathbf{Dp}\bullet\mathbf{Ds}^T+\mathbf{Ds}\bullet\mathbf{Dp}^T)$

Primärteil $\mathbf{Dp}\bullet\mathbf{Dp}^T = \mathbf{E}$ wegen Orthonormiertheit des Primärteils **Dp** (vgl. Abschnitt 1.2.5)

$s_{ij} = 0$ für alle Elemente des Sekundärteils von $\mathbf{D}\bullet\mathbf{D}^T$ wird analog zu a) über zeilenweisen Ansatz hergeleitet.