- Bei einem Petri-Netz mit n Transitionen und m Stellen ist die **Inzidenzmatrix** $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ eine $n \times m$-Matrix:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{array} \\ \mathbf{A} = \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

- Die Elemente errechnen sich aus

$$a_{ij} = a_{ij}^{+} - a_{ij}^{-}, \quad a_{ij} \in \mathbb{N}_0 \qquad i = 1,\dots,n \;\; j = 1,\dots,m$$

  - a_{ij}^{-}, a_{ij}^{+} bezeichnen die Anzahl der Marken, die beim Schalten der Transition i an der Stelle j entfernt oder hinzugefügt werden

Zustandsgleichung:

- Eine nach der k-ten Schaltung erreichte Markierung M_k wird als $m \times 1$-Spaltenvektor $\mathbf{M}_k$ dargestellt

- Element $M_k(i)$ gibt die Anzahl der Marken in Stelle i an
$M_k(i) \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1,\dots,m$

- Der **Schaltvektor $\mathbf{u}_k$** ist ein $n \times 1$-Spaltenvektor

$$u_k(i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn Transition } \mathrm{t_i} \text{ beim k - ten} \\ & \text{Schaltvorgang schaltet} \\ 0 & \text{für alle anderen Transitionen} \end{cases}$$

$$u_k(i) \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n$$

- Der Zustand $\mathbf{M}_k$ kann berechnet werden aus

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{u}_k$$

- Sei $\mathbf{M}_d$ ein Zustand, der von $\mathbf{M}_0$ durch eine Schaltfolge $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d\}$ erreichbar ist, so muß folgende Zustands-gleichung gelten:

$$\mathbf{M}_d = \left(\dots\left(\left(\mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{u}_1\right) + \mathbf{A}^T\mathbf{u}_2\right) + \dots\right) + \mathbf{A}^T\mathbf{u}_d$$

  oder

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T \sum_{k=1}^{d} \mathbf{u}_k$$

- Abkürzung:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} \mathbf{u}_k \qquad x_i \in \mathbb{N}_0, \; i = 1,\dots,n$$

- Vektor $\mathbf{x}$ gibt in seiner i-ten Komponente $x(i)$ an, wie oft die Transition t_i beim Übergang von $\mathbf{M}_0$ nach $\mathbf{M}_d$ schalten muß

- Mit der Abkürzung folgt

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

- Die Erreichbarkeit einer Markierung $\mathbf{M}_d$ kann über die Existenz eines Lösungsvektors $\mathbf{x}$ bestimmt werden

Invarianten:

- Oft können **Stellen-** und **Transitionsinvarianten** (S- und T-Invarianten) zum Nachweis von Eigenschaften herangezogen werden

- S- und T-Invarianten können aus der Netzstruktur abgeleitet werden

- **T-Invarianten**

- Eine T-Invariante ist ein Schaltvektor, der zur gleichen Markierung führt

- Aus der Gleichung $\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{x}$ folgt, daß $\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_0$ genau dann gilt, wenn
$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

- T-Invarianten können als Lösung $\mathbf{x}$ dieses linearen Gleichungssystems bestimmt werden

- Randbedingung: Die Schalthäufigkeit ist ganzzahlig und nichtnegativ. Also muss auch $\mathbf{x}$ ganzzahlig und nichtnegativ sein

- **S-Invarianten**
- Eine S-Invariante gibt eine gewichtete Summe an, die für alle Markierungen **M** gleich der gewichteten Summe der initialen Markierung ist: $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{M}_0{}^T \cdot \mathbf{y}$
- Gewichtung erfolgt mit dem Stellenvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m)^T$, m ist die Anzahl der Stellen
- Die Berechnung von **y** erfolgt über die Zustandsgleichung
  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ Multiplikation mit **y**
  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}_0{}^T + \mathbf{x}^T \mathbf{A}$
  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{M}_0{}^T \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$
- Falls $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = 0$ gilt $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{M}_0{}^T \cdot \mathbf{y}$
- S-Invarianten können als Lösungen **y** des Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = 0$ bestimmt werden
- Randbedingung: Eine Markierung ist stets ganzzahlig und nichtnegativ. Also muss auch **y** ganzzahlig und nichtnegativ sein

- **Lösungsverfahren für $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = 0$ für ganzzahlige y**
- Gesucht ist eine Basis für den Nullraum (Kern) der Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$: $\text{Nullraum}(A) = \{y : A \cdot y = 0\}$
- Wenn A den Rang r hat, dann kann jeder Vektor $y \in \text{Nullraum}(A)$ durch genau m-r Basisvektoren $b_i \in \mathbb{Z}^m$ dargestellt werden:

$$y = \sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i b_i \text{ für beliebige } \lambda_i \in \mathbb{Z}$$

- Zur Lösung wird A nach unten mit der $n \times n$ Einheitsmatrix E erweitert und durch elementare Spaltenumformungen in Spaltenstufenform überführt. Alle Operationen werden zugleich auch an E ausgeführt:

$$\frac{A}{E} \xrightarrow[\text{Spaltenstufenform}]{\text{Umformen in}} \frac{N}{B}$$

- Eine Matrix ist in Spaltenstufenform wenn gilt:
  - Die ersten m-r Spalten sind gleich Null
  - In den restlichen r Spalten nimmt die Anzahl der abschließenden Nullen von Spalte zu Spalte ab.
- Elementare Spaltenumformungen sind:
  - Addieren eines ganzzahligen Vielfachen einer Spalte auf eine andere.
  - Vertauschen von zwei Spalten
- Die Spalten $b_1..b_{m-r}$ von B (unter den Nullspalten von N) sind die gesuchten Basisvektoren

- **Lösungsverfahren für $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = 0$, $y \in \mathbb{N}$**
- durch die zusätzliche Bedingung der Nichtnegativität erhöht sich die Komplexität erheblich. Während es höchstens m-1 Basisvektoren aus $\mathbb{Z}$ geben kann, ist die Zahl von Basisvektoren aus $\mathbb{N}$ im schlimmsten Fall exponentiell
- Initialisiere Matrix $C^{m-r \times m}$. Die Reihen von C sind die transponierten Basisvektoren $b_1..b_{m-r}$

  for Spalte j:=1 **to** m **do**

  R:=aktuelle Anzahl von Reihen in C

  for Reihe a:=1 **to** R **do**

  Wenn $a(j) \neq 0$: Füge zu C alle positiven Linearkombinationen von Paaren von Reihen $(b \neq a, c \neq a)$ hinzu, die Spalte j von a zu Null machen.

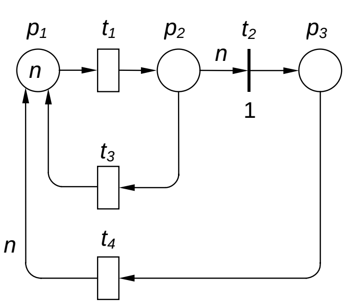
  end do

  Eliminiere alle Spalten von A, in denen die i-te Spalte negativ ist.

  end do

  Die Reihen von C sind nicht-negative Invarianten, aber noch nicht notwendig minimal. Entferne alle nicht-minimalen Invarianten
- Eine Invariante heißt minimal, wenn keine andere Invariante existiert, die elementweise kleiner ist

Beispiel: Petri-Netz-Modell des redundanten *n*-Komponenten-Systems mit Reparatur



- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ n & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & n \\ 1 & -n & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- **Minimale T-Invarianten**

Initialisierung	$Sp2 = Sp2 + Sp4$	$Sp1 = Sp1 + Sp3;$ $Sp2 = Sp2 + n \times Sp3$
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & n \\ 1 & -n & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & n & 1 & n \\ 1 & -n & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Es gibt 2 von Null verschiedene Spalten => Rang der Matrix ist 2
- Die ersten beiden Spalten der Transformationsmatrix geben die Vektoren der $\mathbb{Z}$-Basis an: $x_1 = (1,0,1,0)$ und $x_2 = (0,1,-n,1)$
- $\mathbf{x}_1 = (1,0,1,0)$ ist eine minimale T-Invariante

  Sie beschreibt Ausfall und Reparatur einer Komponente
- Durch Linearkombination $\mathbf{x}_2 + n \cdot \mathbf{x}_1$ erhält man die zweite minimale T-Invariante $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (n,1,0,1)$

  Sie beschreibt Ausfall und Reparatur des Gesamt-systems

- **Minimale S-Invarianten**

Initialisierung	$Sp1 = Sp1 + n \times Sp3$	$Sp1 = Sp1 + Sp2$
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ n & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ n & -n & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Damit ist $\mathbf{y} = (1,1,n)$ eine minimale S-Invariante
- Die gewichtete Summe $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{M}_0{}^T \cdot \mathbf{y}$ ist immer gleich n

  Z.B.: $\mathbf{M}_0{}^T \cdot \mathbf{y} = [n \quad 0 \quad 0] \cdot [1 \quad 1 \quad n]^T = n$
- Da alle Stellen von der S-Invariante überdeckt sind, folgt, dass der Erreichbarkeitsgraph endlich ist

Literatur: J.M. Colom, M.Silva. *Convex Geometry and Semiflows in P/T Nets. A Comparative Study of Algorithms for Computation of Minimal P-Semiflows*. Advances in Petri Nets 1990, Band 483 der Reihe Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag 1991